Nombre dérivé

Le **nombre dérivé** d'une fonction f en a ($a \in \mathbb{R}$), **lorsqu'il existe**, est défini par l'une des deux limites suivantes :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Ce nombre dérivé représente le taux de variation instantané de f au point a, c'est-à-dire la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

Exercice :

1. Soit $t(x) = -x^2 + 4$.
   Calculer le nombre dérivé de t en $a = 1$.
2. Soit $l(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
   Calculer le nombre dérivé de l en $a = 2$.
3. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
   Calculer le nombre dérivé de g en $a = 1$.
4. Soit $h(x) = \sqrt{x}$.
   Calculer le nombre dérivé de h en $a = 4$.
5. Soit $j(x) = x^3$.
   Calculer le nombre dérivé de j en $a = 2$.
6. Soit $f(x) = |x|$.
   Étudier, à l'aide de la définition, l'existence du nombre dérivé de f en $a = 0$ en considérant
   $$\frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Corrections

1. **Fonction $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ en $a = 2$.**
   Le taux d'accroissement entre 2 et $2 + h$ est :
   $$\frac{f(2+h) - f(2)}{h}.$$
   Calculons $f(2 + h)$:
   $$f(2+h) = 2(2+h)^2 - 3(2+h) + 1.$$
   Développons :
   $$(2+h)^2 = 4 + 4h + h^2,$$
   donc
   $$f(2+h) = 2(4 + 4h + h^2) - 3(2+h) + 1 = 8 + 8h + 2h^2 - 6 - 3h + 1.$$
   On regroupe :
   $$f(2+h) = (8 - 6 + 1) + (8h - 3h) + 2h^2 = 3 + 5h + 2h^2.$$
   D'autre part,
   $$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3.$$
   Le taux d'accroissement est donc
   $$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(3 + 5h + 2h^2) - 3}{h} = \frac{5h + 2h^2}{h} = 5 + 2h.$$
   Puis passage à la limite :
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0}(5 + 2h) = 5.$$
   Donc le nombre dérivé de f en 2 est
   $$f'(2) = 5.$$

2. **Fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 1$.**
   On utilise la définition
   $$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$
   On sait que $f(1) = 1$. On a donc :
   $$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}.$$
   On met au même dénominateur dans le numérateur :
   $$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}.$$

Donc

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \frac{1-x}{x(x-1)}.$$

Or $1-x = -(x-1)$, donc

$$\frac{1-x}{x(x-1)} = \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -\frac{1}{x},$$

pour $x \neq 1$. Ainsi

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{x}.$$

Puis passage à la limite :

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$$

Donc le nombre dérivé de f en 1 est

$$f'(1) = -1.$$

3. **Fonction $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 4$.**
   On utilise la définition

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}.$$

On a $f(4) = \sqrt{4} = 2$, donc

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}.$$

On rationalise le numérateur en multipliant par le conjugué :

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}.$$

On simplifie :

$$\frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2},$$

pour $h \neq 0$.
Puis passage à la limite :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Donc le nombre dérivé de f en 4 est

$$f'(4) = \frac{1}{4}.$$

4. **Fonction $f(x) = x^3$ en $a = 2$.**
On utilise
$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$
On sait que $f(2) = 2^3 = 8$. On a donc :
$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$
On factorise la différence de cubes :
$$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$
Ainsi
$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4,$$
pour $x \neq 2$.
Puis passage à la limite :
$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 4 + 4 + 4 = 12.$$
Donc le nombre dérivé de f en 2 est
$$f'(2) = 12.$$

5. **Fonction $f(x) = |x|$ en $a = 0$.**
On étudie
$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$
On distingue deux cas :
— Si $h > 0$, alors $|h| = h$, donc
$$\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$
Ainsi
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1.$$
— Si $h < 0$, alors $|h| = -h$, donc
$$\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1.$$
Ainsi
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$
On obtient donc une limite à droite égale à 1 et une limite à gauche égale à -1. Les deux limites ne sont pas égales, donc la limite
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$
n'existe pas.
On en déduit que le nombre dérivé de $f(x) = |x|$ en 0 **n'existe pas**.