

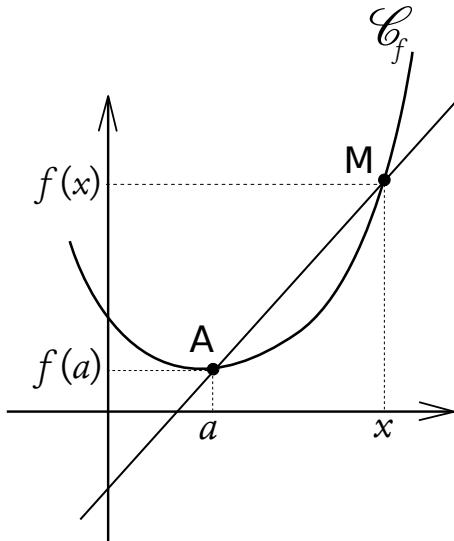
Dérivation

1 Nombre dérivé et tangente

1.1 Sécante à une courbe et taux d'accroissement

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soient a et x deux réels distincts de l'intervalle I . Soient deux points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$ appartenant à \mathcal{C}_f .



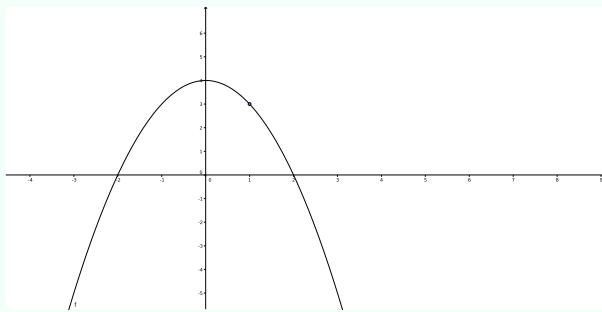
La sécante (AM) à \mathcal{C}_f a donc pour coefficient directeur : $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Définition || Le nombre $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est appelé **accroissement moyen** de f entre a et x .

Remarque || En posant $x = a + h$, on obtient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
En pratique, les deux formules de l'accroissement moyen sont importantes, on utilisera l'une ou l'autre selon le contexte.

Exemple

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 4$.



Le taux d'accroissement moyen entre 1 et $1 + h$ est :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-(1+h)^2 + 4 - 3}{h} = \frac{-1 - 2h - h^2 + 1}{h} = \frac{-2h - h^2}{h} = -2 - h.$$

1.2 Nombre dérivé

Intuitivement, lorsque le point M se rapproche de A , alors $1 + h$ devient de plus en plus proche de 1, et h devient de plus en plus proche de 0.

On dit alors que h tend vers 0.

Dans l'exemple précédent, lorsque h tend vers 0, le taux d'accroissement $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2 - h$ se rapproche de -2 . On note :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -2.$$

Définition

Si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un nombre fini lorsque h tend vers zéro, on dit que la fonction f est **dérivable** en a .

Ce nombre est alors appelé **nombre dérivé** de f en a . Dans ce cas, on le note $f'(a)$, autrement dit (lorsque la limite existe) on a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 4$ est dérivable en 1, et on a $f'(1) = -2$.

Remarque

S'il n'y a pas de limite ou que la limite n'est pas réelle (par exemple, si elle vaut $+\infty$ ou $-\infty$), alors f n'est pas dérivable en a .

Exercice

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ est dérivable en $a = 1$.

$$\begin{aligned} \forall h \in \mathbb{R}^* : \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \frac{1^2 + 2h + h^2 - 1^2}{h} = \frac{2h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h \end{aligned}$$

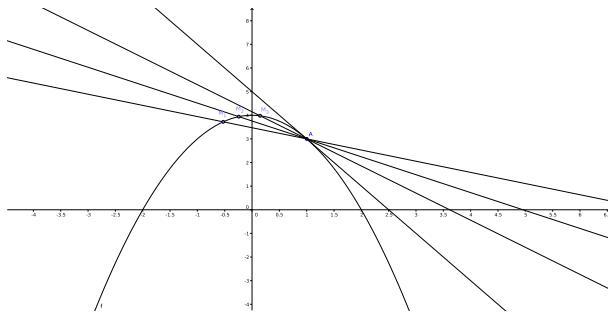
Or, $\lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$.

Ainsi, f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = 2$.

1.3 Tangente à une courbe

Géométriquement, si l'abscisse x du point M tend vers l'abscisse a de A , alors le point M se rapproche de A , et le coefficient directeur de la droite (AM) tend vers $f'(a)$.

Autrement dit, la droite (AM) se rapproche de plus en plus de la droite T passant par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.



Définition

On appelle **tangente à la courbe** \mathcal{C}_f au point d'abscisse a la droite passant par $A(a; f(a))$ et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$.

Le **nombre dérivé** est donc (lorsqu'il existe) le **coefficient directeur** de la tangente. On peut dans des cas simples le déterminer graphiquement.

Propriété

L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Exercice

$f(x) = -x^2 + 4$. Trouver l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $a = 1$.

2 Fonction dérivée

On a vu dans l'exemple précédent que $f'(1) = -2$. De même on peut calculer $f'(2), f'(3), f'(4)$ etc. Il nous faut maintenant trouver un moyen plus rapide, une méthode plus générale afin de trouver les nombres dérivés d'une fonction.

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a + h)}{h} = 2a + h.$$

On trouve $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a$. La fonction f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$. Ce résultat est valable pour tout nombre réel a . On dit dans ce cas que f est dérivable sur \mathbb{R} , et on appelle **fonction dérivée** la fonction définie par $f'(x) = 2x$.

2.1 Définition

Définition

Si une fonction est dérivable pour tout réel a de l'intervalle I , on dit qu'elle est **dérivable sur l'intervalle I** .

Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée** de f sur l'intervalle I la fonction notée f' définie par $x \mapsto f'(x)$.

Remarque

Dire qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I signifie donc qu'il existe des tangentes en tout point de la courbe représentative \mathcal{C}_f .

2.2 Dérivées des fonctions usuelles

fonction f	dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = k$ avec k constante	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ avec n entier > 0	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$	$]-\infty; 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$	$]-\infty; 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec n entier > 0	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$	$]-\infty; 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x $	$1 \text{ si } x > 0, -1 \text{ si } x < 0$	$]-\infty; 0[\cup]0, +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}
$f(x) = \tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors la fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u' + v'$.

On note : $(u + v)' = u' + v'$.

Exemple

Soit $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$. Alors $f = u + v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \frac{1}{x}$ définies sur $]0; +\infty[$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$, et $\forall x \in]0; +\infty[, u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Par suite, la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , et $k \in \mathbb{R}$. Alors la fonction (ku) est dérivable sur I et sa dérivée est $k \times u'$.

On note : $(ku)' = k \times u'$.

Exemple

Soit $f(x) = 3x^3 - x^2 + x\sqrt{2} - 1$ définie sur \mathbb{R} .

Remarque

Par suite, toute fonction polynôme est dérivable sur son ensemble de définition.

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Alors la fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u'v + uv'$.

On note : $(uv)' = u'v + uv'$.

Exemple

Soit $f(x) = x\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$. Alors f est de la forme uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Par suite la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Propriété

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I , et telle que $\forall x \in I, v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et sa dérivée est $\frac{-v'}{v^2}$.

On note : $(\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2}$.

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ définie sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$. La fonction f est de la forme $\frac{1}{v}$ où $v(x) = 3x - 1$. La fonction v est dérivable sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$ et $v'(x) = 3$. Par suite f est dérivable sur $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$ et $f'(x) = \frac{-3}{(3x-1)^2}$.

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , telles que $\forall x \in I, v(x) \neq 0$.
 Alors la fonction $(\frac{u}{v})$ est dérivable sur I et sa dérivée est $\frac{u'v - uv'}{v^2}$.
 On note : $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple

Soit $f(x) = \frac{4x+5}{x-2}$ définie sur $]2; +\infty[$.

4 Fonctions composées et tableau récapitulatif

Théorème

Dérivée de fonctions composées

Soient f et g définies et dérivables sur D_f et D_g et $\forall x \in D_g, g(x) \in D_f$. Alors :

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \times g'(x)$$

Exemple

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (4x - 5)^3$.

$$\text{On a } h(x) = (f \circ g)(x) \text{ avec :} \quad \begin{aligned} f(x) &= x^3 & g(x) &= 4x - 5 \\ f'(x) &= 3x^2 & g'(x) &= 4 \end{aligned}$$

f et g sont dérivables sur \mathbb{R} , donc h est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = 3(4x - 5)^2 \times 4 = 192x^2 - 480x + 300$$

Tableau récapitulatif

f	f'
λu	$\lambda u'$
$u + v$	$u' + v'$
$u v$	$u' v + u v'$
$\frac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\frac{u' v - u v'}{v^2}$
$f \circ g$	$(f' \circ g) \times g'$

5 Applications de la dérivation

5.1 Dérivation et sens de variation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si, pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I .
- Si, pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I .
- Si, pour tout x de I , $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .

Remarque

1. De même, lorsque $f'(x) > 0$, la fonction f est *strictement croissante* sur I , etc.
2. Ce théorème nous permet donc d'étudier le sens de variation d'une fonction, en étudiant le **signe** de sa dérivée. Par ailleurs, dans certains cas cela n'est pas nécessaire (fonction de référence, polynôme du second degré, somme de deux fonctions, etc.).

Exemple 1

Soit g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - 3x - 1$. En posant $g = u + v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = -3x - 1$, on voit que cette fonction est la somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, donc est elle-même dérivable sur $]0; +\infty[$.

On a : $\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3$.

De plus $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{36}$. On obtient alors :

x	0	$\frac{1}{36}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g		$\frac{-11}{12}$	

$$\text{Avec : } g\left(\frac{1}{36}\right) = \sqrt{\frac{1}{36}} - 3 \times \frac{1}{36} - 1 = \dots = \frac{-11}{12}.$$

Remarque : Si on regarde la représentation graphique de cette fonction à la calculatrice, la fonction semble (au premier abord) décroissante sur $]0, +\infty[$. Il faut donc se méfier de l'affichage rendu, et utiliser intelligemment le zoom de la calculatrice.

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

f est une fonction polynôme donc est dérivable sur \mathbb{R} . On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 2 = x^2 + x - 2$.

Il faut déterminer le signe de $f'(x)$. Pour cela, on calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$.

Le discriminant Δ est strictement positif, donc il y a deux racines au polynôme $x^2 + x - 2$.

On trouve $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$. On en déduit le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
f		$\frac{25}{3}$	$\frac{23}{6}$	

Avec :

$$f(-2) = \frac{1}{3} \times (-2)^3 + \frac{1}{2} \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 5 = \dots = \frac{25}{3}.$$

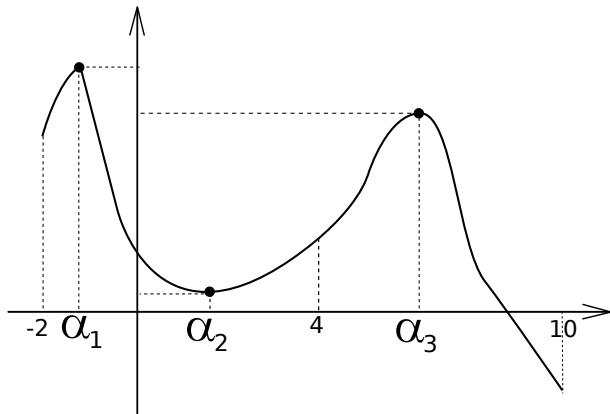
$$f(1) = \frac{1}{3} \times (1)^3 + \frac{1}{2} \times (1)^2 - 2 \times 1 + 5 = \dots = \frac{23}{6}.$$

5.2 Extremum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\alpha \in I$. On dit que :

- f admet sur I un maximum local en α s'il existe un intervalle ouvert $]a; b[$ inclus dans I tel que $\forall x \in]a; b[, f(x) \leq f(\alpha)$.
- f admet sur I un minimum local en α s'il existe un intervalle ouvert $]a; b[$ inclus dans I tel que $\forall x \in]a; b[, f(x) \geq f(\alpha)$.



Exemple

Sur l'exemple représenté, α_2 est un minimum local sur (par exemple) l'intervalle $]-2; 4[$, en revanche ce n'est pas un minimum sur $]-2; 10[$. De même α_3 est un maximum local sur (par exemple) l'intervalle $]4; 10[$, en revanche ce n'est pas un minimum sur $]-2; 10[$. De plus α_1 est un maximum global sur l'intervalle $]-2; 10[$.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $\alpha \in I$.

Si f admet en α un extremum local, alors $f'(\alpha) = 0$.

Remarque

- 1) La réciproque de cette propriété est fausse, par exemple la fonction $f(x) = x^3$ a pour dérivée la fonction $f'(x) = 3x^2$ qui s'annule en 0, mais cette fonction n'admet pas d'extremum en 0.
- 2) Lorsque f' s'annule et **change de signe** en un nombre réel $\alpha \in I$, alors la fonction admet un extremum en α .
- 3) Cette propriété sert donc à trouver d'éventuels candidats au poste d'extremum d'une fonction sur un intervalle donné.

5.3 Convexité

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , C_f est sa courbe représentative dans un repère. Si $a \in I$, on note T_a la tangente à C_f en $A(a; f(a))$.

Définition

- f est dite **convexe** sur I si pour tout a dans I , T_a est en-dessous de C_f au voisinage de a .
- f est dite **concave** sur I si pour tout a dans I , T_a est au-dessus de C_f au voisinage de a .

Exemples

- La fonction carré ($x \mapsto x^2$) est convexe sur \mathbb{R} .
- La fonction racine carrée ($x \mapsto \sqrt{x}$) est concave sur \mathbb{R}^+ .
- La fonction inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$) est convexe sur \mathbb{R}_+^* et concave sur \mathbb{R}_-^* .
- La fonction cube ($x \mapsto x^3$) est convexe sur \mathbb{R}_+ et concave sur \mathbb{R}_- .

Définition Si f' est dérivable, on appelle **dérivée seconde** et on note f'' la fonction dérivée de f' .

Propriété

- f est convexe sur I si pour tout x dans I , $f''(x) > 0$.
- f est concave sur I si pour tout x dans I , $f''(x) < 0$.

Définition Si $f''(x)$ s'annule **et** change de signe en x_0 , alors C_f admet un **point d'inflexion** en son point de coordonnées $(x_0 ; f(x_0))$.

Un point d'inflexion est un point en lequel la courbe traverse sa tangente. En cette valeur de x , la courbe change de convexité.

Exemple La courbe représentative de la fonction cube admet un point d'inflexion en $(0 ; 0)$.

6 Continuité - Dérivabilité

Définition Une **fonction** f est dite **continue** sur un intervalle I si on peut tracer C_f d'un seul trait.

Exemples

- Les fonctions carré, racine carrée et cube sont continues sur leur ensemble de définition.
- La fonction inverse n'est pas continue sur \mathbb{R} , elle est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Propriétés Une fonction dérivable sur I est continue sur I .

Propriétés

- Les fonctions polynômes sont dérивables, leurs dérivées (elles-mêmes polynômes) sont dérivables.
- Les fonctions homographiques $\left(x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}\right)$ sont dérivables sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- La fonction racine carrée est définie et continue sur \mathbb{R}_+ mais dérivable seulement sur \mathbb{R}_+^* .
- La fonction valeur absolue est définie et continue sur \mathbb{R} mais dérivable seulement sur \mathbb{R}^* .

Exercice Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

$$\begin{cases} f(x) = -x & \forall x \in]-\infty; 0] \\ f(x) = x & \forall x \in [0; +\infty[\end{cases}$$

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et,

$$\begin{cases} f'(x) = -1 & \forall x \in]-\infty; 0[\\ f'(x) = 1 & \forall x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

Or,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{cases}$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x).$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.