

Arithmétique

Le mot arithmétique vient du grec «arithmos» = nombre. En effet, l'arithmétique est la science des nombres.

I) Division Euclidienne

A) Définition et vocabulaire

Définition

On considère a et b deux nombres entiers positifs avec b non nul.

Effectuer la **division euclidienne** de a par b , c'est trouver le couple unique d'entiers positifs q et r vérifiant $a = b \times q + r$ avec $r < b$.

Exemple et vo- cabu- laire

$$\begin{array}{r|l} 23 & 7 \\ 2 & 3 \end{array}$$

23 est le **dividende**, 7 est le **diviseur**

3 est le **quotient** et 2 est le **reste**.

On a donc $23 = 7 \times 3 + 2$

B) Divisibilité et critères

Vocabulaire

On sait que $21 = 7 \times 3$.

On dit que 21 est un **multiple** de 7.

On dit que 7 est un **diviseur** de 21.

Remarques :

- 1 divise tous les nombres.
- Tout entier non nul est un diviseur de 0

Critères de divisibilité

- Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair.
- Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

Hors programme : un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

C) Méthode pour trouver tous les diviseurs d'un nombre (méthode longue)

Méthode

Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre donné :

- On teste la division de ce nombre avec 1, 2, 3, 4 etc.
- On s'arrête lorsque qu'il y a une "inversion" entre le dividende et le diviseur (le dividende devient plus petit que le diviseur).

Exemple

Trouver les diviseurs de 294.

$$\begin{array}{r} 294 \overline{) 1} \\ \hline 294 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 294 \overline{) 2} \\ \hline 147 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 294 \overline{) 3} \\ \hline 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 294 \overline{) 6} \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 294 \overline{) 7} \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 294 \overline{) 14} \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 294 \overline{) 21} \\ \hline 14 \end{array}$$

Les diviseurs de 294 sont : 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 49, 98, 147, 294.

Exercice

Trouver tous les diviseurs de 30.

II) Nombres premiers

A) Définition

Définition

Un nombre premier est un nombre entier naturel qui possède exactement deux diviseurs positifs qui sont 1 et lui-même.

Remarques :

- Il est bon de connaître quelques nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
- La liste des nombre premier est infinie (voir activité crible d'Eratosthène).

Propriété

Tout nombre premier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique.

B) Méthode pour décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ \hline & 147 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ \hline & 49 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ \hline & 7 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array}$$

La décomposition de 294 en produit de facteurs premiers est : $294 = 2 \times 3 \times 7 \times 7$

Exercice

Décomposer 210 en produit de facteurs premiers.

III) Diviseurs communs à deux entiers, et PGCD

Définition

Le plus grand commun diviseur (en abrégé PGCD) de deux entiers non nuls est le plus grand entier qui divise ces deux nombres.

Exemple

Trouver le PGCD de 60 et 100.

Les diviseurs de 60 sont : (1), (2), 3, (4), (5), 6, (10), 12, 15, (20), 30, 60.

Les diviseurs de 100 sont : (1), (2), (4), 5, (10), (20), 25, 50, 100.

Les **diviseurs communs** à 60 et 100 sont : (1), (2), (4), (5), (10), (20).

Si on regarde le **plus grand diviseur** qu'ont en **commun** 60 et 100, on voit qu'il s'agit ici de (20).

Ainsi 20 est le plus grand diviseur commun de 60 et 100.

On a donc : **PGCD(60 ; 100) = 20.**

IV) Multiples communs à deux entiers, et PPCM

Définition

Le plus petit commun multiple (en abrégé PPCM) de deux entiers non nuls est le plus petit entier strictement positif qui soit multiple de ces deux nombres.

Exemple

Trouver le PPCM de 3 et 4.

Les multiples de 3 sont : 3, 6, 9, (12), 15, 18, 21, (24), 27, (30), etc (il y en a une infinité).

Les multiples de 4 sont : 4, 8, (12), 16, 20, (24), 28, 32, etc (il y en a une infinité).

Les **multiples communs** à 3 et 4 sont : (12), (24), etc.

Si on regarde le **plus petit multiple** non nul qu'ont en **commun** 3 et 4, on voit qu'il s'agit ici de (12).

Ainsi 12 est le plus petit multiple commun non nul de 3 et 4.

On a donc : **PPCM(3;4)=12.**

V) Une autre méthode pour trouver le PGCD et le PPCM

La méthode précédente est un peu longue (trouver tous les diviseurs, entourer les diviseurs communs et trouver le plus petit, etc). On peut se servir de ce que l'on a vu précédemment pour aller plus vite :

Méthode
PGCD

-On entoure les diviseurs qui sont **en communs**

-On effectue le produit des nombres entourés.

Exemple

Trouver le PGCD de 60 et 100.

On a vu que :

$$60 = (2) \times (2) \times 3 \times (5)$$

$$100 = (2) \times (2) \times (5) \times 5$$

On a donc **PGCD(60;100)= $2 \times 2 \times 5=20$**

Méthode
PPCM

-On décompose chaque nombre en un produit de facteurs premiers.

-On repère tous les facteurs figurant dans l'un **au moins** de ces produits élevés à la **plus grande puissance**.

-On multiplie ces facteurs. On obtient le PPCM de ces deux nombres.

Exemple

Trouver le PPCM de 24 et 36.

On a vu que :

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Le facteur 2 apparaît au maximum 3 fois ($2 \times 2 \times 2$), le facteur 3 apparaît au maximum 2 fois (3×3).

On a donc **PPCM(24;36)= $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 =72$.**