Test B (13 Novembre 2025) - Éléments de correction

Exercice 1 : On considère le nombre complexe $a = \dfrac{3-2i}{1+i}$.

Déterminer la forme algébrique de a.

Correction :

$a = \dfrac{3-2i}{1+i} = \dfrac{3-2i}{1+i} \times \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{3-3i-2i+2i^2}{1-i^2} = \dfrac{1-5i}{1-(-1)} = \dfrac{1-5i}{2}$.

La forme algébrique de a est donc :

$$\boxed{a = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i.}$$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. Donner la ou les solutions sous forme algébrique.

1. $3z - 2 + i = iz + 4$
2. $4\overline{z} + 2i = 1 - 3i\,\overline{z}$

Correction :

1. $$3z - 2 + i = iz + 4.$$

   On rassemble les termes en z d'un côté et les constantes de l'autre :

   $$3z - iz = 4 + 2 - i \quad \Longrightarrow \quad z(3-i) = 6 - i.$$

   Donc
   $$z = \frac{6-i}{3-i}.$$

   On simplifie en multipliant par le conjugué de $3-i$:

   $$z = \frac{6-i}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i} = \frac{(6-i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{18+6i-3i-i^2}{3^2-i^2}.$$

   Ainsi
   $$z = \frac{19+3i}{10} = \frac{19}{10} + \frac{3}{10}i.$$

   $$\boxed{z = \frac{19}{10} + \frac{3}{10}i.}$$

2. $$4\overline{z} + 2i = 1 - 3i\,\overline{z}.$$

   On a donc : $\overline{z}(4+3i) = 1 - 2i$ soit $\overline{z} = \dfrac{1-2i}{4+3i}$.

   On a donc $\overline{z} = \dfrac{1+2i}{4-3i}$.

   En multipliant par le conjugué de $4-3i$ et en procédant comme à la question précédente, on obtient :

   $\overline{z} = \dfrac{(1+2i)\times(4+3i)}{(4-3i)\times(4+3i)} = \dfrac{4+3i+8i+6i^2}{16-9i^2} = \dfrac{4+11i-6}{16+9} = \dfrac{-2+11i}{25}$

   $$\boxed{z = -\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i.}$$

   Remarque : on peut aussi travailler en posant $z = a + ib$

Exercice 3 : Dans chaque cas, déterminer le sens de variation des suites suivantes.

$a)$ Pour tout entier naturel $n,\ u_n = 2 \times 5^n$ $\qquad b) \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{2n+3}{-2n+1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Correction :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = 2 \times 5^{n+1} - 2 \times 5^n = 2 \times 5^n(5-1) = 8 \times 5^n > 0.$$
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} = u_n + \frac{2n+3}{-2n+1}.$$
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{-2n+1}.$$
Or $\forall n \geqslant 1,\ 2n+3 > 0$.
De plus, $n \geqslant 1 \Rightarrow 2n \geqslant 2$ donc $-2n \leqslant -2$, et $-2n+1 \leqslant -1 < 0$.
Autrement dit, la fraction a un numérateur toujours strictement et un dénominateur toujours strictement négatif.

Finalement, $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{2n+3}{-2n+1} < 0$$
d'où
$$u_{n+1} - u_n < 0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

Exercice 4 : Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante :
$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0.$$

1. Montrer que $z = 1$ est une racine évidente de cette équation.
2. En déduire une factorisation du polynôme sous la forme
$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z-1)(z^2 + az + b)$$
et déterminer les valeurs de a et b.
3. Résoudre l'équation du second degré obtenue et en déduire les deux autres racines complexes.

Correction :

1. On teste $z = 1$ dans le polynôme :
$$1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 + 4 - 2 = 0.$$
Donc $z = 1$ est bien une racine.

2. On sait que $z = 1$ est racine, donc le polynôme est factorisable par $(z - 1)$:

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z - 1)(z^2 + az + b).$$

On développe le produit de droite :

$$(z - 1)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b = z^3 + (a - 1)z^2 + (b - a)z - b.$$

En identifiant avec

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2,$$

on obtient le système :

$$\begin{cases} a - 1 = -3, \\ b - a = 4, \\ -b = -2. \end{cases}$$

De $-b = -2$, on tire $b = 2$.
De $a - 1 = -3$, on tire $a = -2$.
Vérification : $b - a = 2 - (-2) = 4$, ce qui convient.
Ainsi,

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z - 1)(z^2 - 2z + 2).$$

3. On résout maintenant l'équation

$$(z - 1)(z^2 - 2z + 2) = 0.$$

On a déjà la racine $z = 1$.
On résout $z^2 - 2z + 2 = 0$.
Discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4.$$

Donc les deux racines sont

$$z = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Les trois racines complexes de l'équation sont donc :

$$\boxed{z_1 = 1, \quad z_2 = 1 + i, \quad z_3 = 1 - i.}$$

Exercice 5 : On donne les fonctions

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \qquad g(x) = 3 + 2x, \qquad h(x) = g\big(f(x)\big).$$

1. **Tableau de signes de $f(x)$.**
La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ n'est définie que si l'expression sous la racine est positive ou nulle :

$$x^2 - 4 \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant 4 \iff x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2.$$

Le domaine de définition de f est donc $D_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. On obtient donc :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	indéfini	0	$+$	

2. **Ensemble de définition et expression de h.**
On a $h(x) = g(f(x)) = 3 + 2f(x) = 3 + 2\sqrt{x^2 - 4}$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, donc le seul blocage vient de f.
Ainsi, $D_h = D_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

3. **Transformations.**
   On part de la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$.
   — D'abord, on multiplie toutes les ordonnées par 2 : on obtient la courbe représentative de la fonction suivante : $x \longmapsto 2f(x) = 2\sqrt{x^2-4}$. C'est une **homothétie verticale** de rapport 2 (étirement vertical).
   — Ensuite, on ajoute 3 aux ordonnées : on effectue une **translation verticale** de 3 unités vers le haut (translation de vecteur $3\overrightarrow{j}$), ce qui donne la courbe représentative de la fonction h.

$$x \longmapsto 2f(x) + 3 = 3 + 2\sqrt{x^2-4} = h(x).$$

   Ainsi $\mathcal{C}_h$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ en multipliant les ordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ par 2 (homothétie de rapport 2) puis par une translation vers le haut de 3 unités (translation de vecteur $3\overrightarrow{j}$).

__Exercice 6__ : On donne la fonction

$$f(x) = \frac{3x-6}{x-1}.$$

1. (a) **Domaine de définition de f.**
   Le dénominateur ne doit pas être nul :

$$x - 1 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 1.$$

   Donc

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

   (b) **Zéros de f.**
   On cherche les solutions de $f(x) = 0$:

$$\frac{3x-6}{x-1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - 6 = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1.$$

$$3x - 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2.$$

   Il y a donc une unique solution à l'équation $f(x) = 0$, qui est 2. La courbe coupe donc l'axe des abscisses au point de coordonnéesde coordonnées $(2, 0)$.

   (c) **Intersection avec l'axe des ordonnées.**

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0 - 6}{0 - 1} = \frac{-6}{-1} = 6.$$

   Donc l'intersection avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0, 6)$.

   (d) **Tableau de signes de $f(x)$.**
   On factorise d'abord le numérateur :

$$f(x) = \frac{3x-6}{x-1} = \frac{3(x-2)}{x-1}.$$

   Les valeurs remarquables sont donc $x = 1$ (dénominateur nul, point d'exclusion) et $x = 2$ (zéro de la fonction).

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc :

$$f(x) > 0 \text{ sur } (-\infty, 1), \quad f(x) < 0 \text{ sur } (1, 2), \quad f(x) > 0 \text{ sur } (2, +\infty),$$

avec $x = 1$ exclu du domaine et $x = 2$ zéro de la fonction.

(e) **Limites.**

Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$f(x) = \dfrac{3x - 6}{x - 1} = \dfrac{x(3 - \frac{6}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x(3 - \frac{6}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - \frac{6}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \dfrac{3}{1} = 3$

Pour la représentation graphique de la fonction f, il peut être utile de voir que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$.

Calcul de $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x \to 1} 3x - 6 = -3$ et $\lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 0$.

Plus précisément, grâce au tableau de signe suivant, on voit que $\lim\limits_{x \to 1+} x - 1 = 0+$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	

Ainsi $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = -\infty$.

On peut de la même façon voir que $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = +\infty$. Cela peut être utile pour la question suivante.

(f) **Représentation graphique de f.**

Nous pouvons nous aider de ce qui vient d'être traité précédemment pour tracer la courbe représentative de f :

— asymptote verticale : $x = 1$ (car le dénominateur s'annule en 1) ;
— asymptote horizontale : $y = 3$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$) ;
— point d'intersection avec l'axe des ordonnées : $(0, 6)$;
— point d'intersection avec l'axe des abscisses : $(2, 0)$.

La courbe est celle d'une hyperbole, approchant la droite $x = 1$ verticalement et la droite $y = 3$ horizontalement.

(g) **Fonction réciproque f^{-1}.**

On pose $y = f(x)$, ce qui nous donne :

$$y = \frac{3x - 6}{x - 1}.$$

On multiplie par $x - 1$:

$$y(x - 1) = 3x - 6.$$

Développons :

$$yx - y = 3x - 6.$$

On rassemble les termes en x du même côté :

$$yx - 3x = y - 6 \quad \Longleftrightarrow \quad x(y - 3) = y - 6.$$

Si $y \neq 3$, on obtient

$$x = \frac{y - 6}{y - 3}.$$

En échangeant les rôles de x et y, on obtient : $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 6}{x - 3}$, définie pour $x \neq 3$.

On remarque que l'asymptote verticale de f^{-1} est $x = 3$, et qu'en plus $\lim_{x \to \pm\infty} f^{-1}(x) = 1$, donc l'asymptote horizontale est $y = 1$.

2. **Questions vrai/faux (sans justification demandée dans l'énoncé).**

   (a) *« L'asymptote verticale de f^{-1} a pour équation $y = 3$. »*
   L'asymptote verticale de f^{-1} est donnée par l'interdiction du dénominateur $x - 3 = 0$, donc c'est la droite $x = 3$ (et non $y = 3$).

   $$\boxed{\text{Faux}}$$

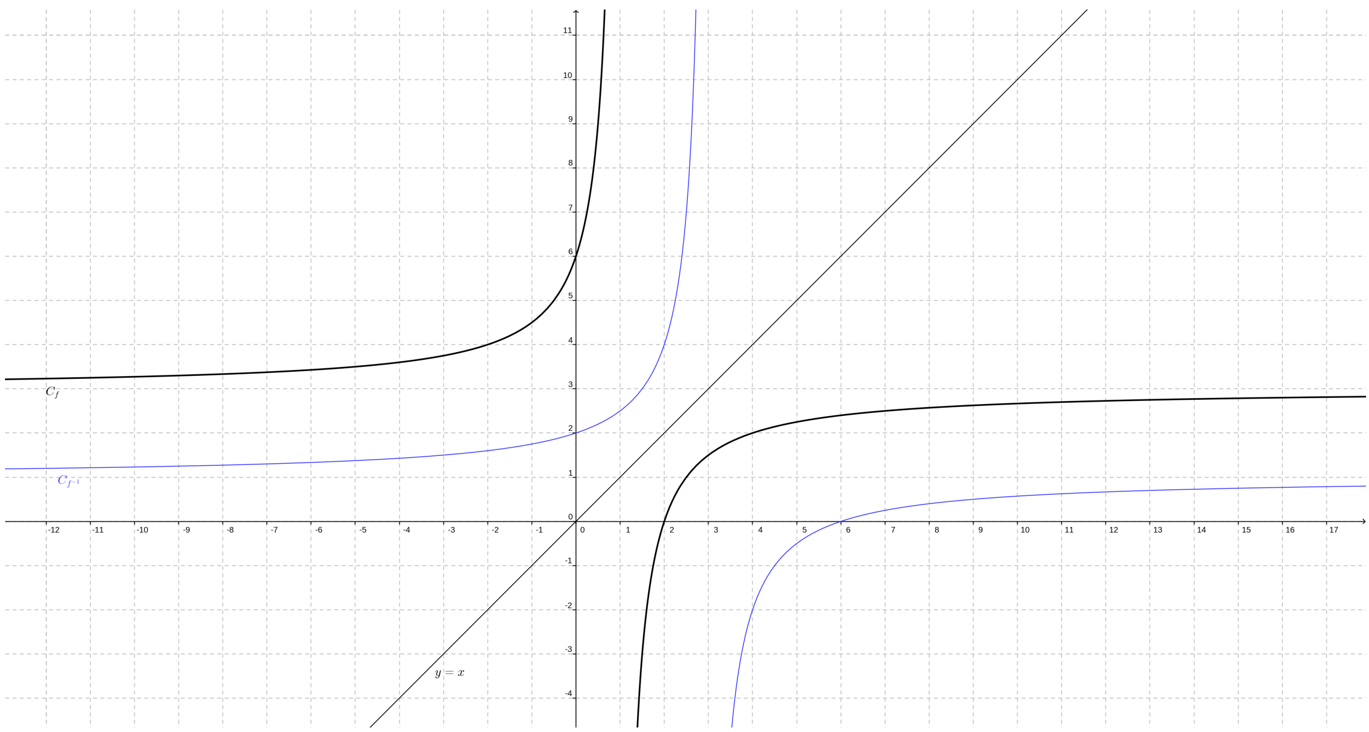
   (b) *« Si $f(4) = 2$, alors $f^{-1}(2) = 4$. »*
   On vérifie d'abord : $f(4) = \dfrac{3 \cdot 4 - 6}{4 - 1} = \dfrac{12 - 6}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$. Par définition de la fonction réciproque, si $f(4) = 2$, alors $f^{-1}(2) = 4$.

   $$\boxed{\text{Vrai}}$$

   (c) *« Les graphiques représentatifs des fonctions f et f^{-1} se trouvent entièrement de part et d'autre de la droite $y = x$. »*
   De manière générale, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. L'énoncé utilise une formulation qui revient à rappeler cette propriété (on les retrouve « de part et d'autre » de cette droite, par symétrie).

   $$\boxed{\text{Vrai}}$$

3. **Représentation graphique de f^{-1}.**
   On dessine sur le même repère que pour f :
   — la courbe de $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 6}{x - 3}$,
   — asymptote verticale : $x = 3$,
   — asymptote horizontale : $y = 1$,
   — symétrie de la courbe de f par rapport à la droite $y = x$.

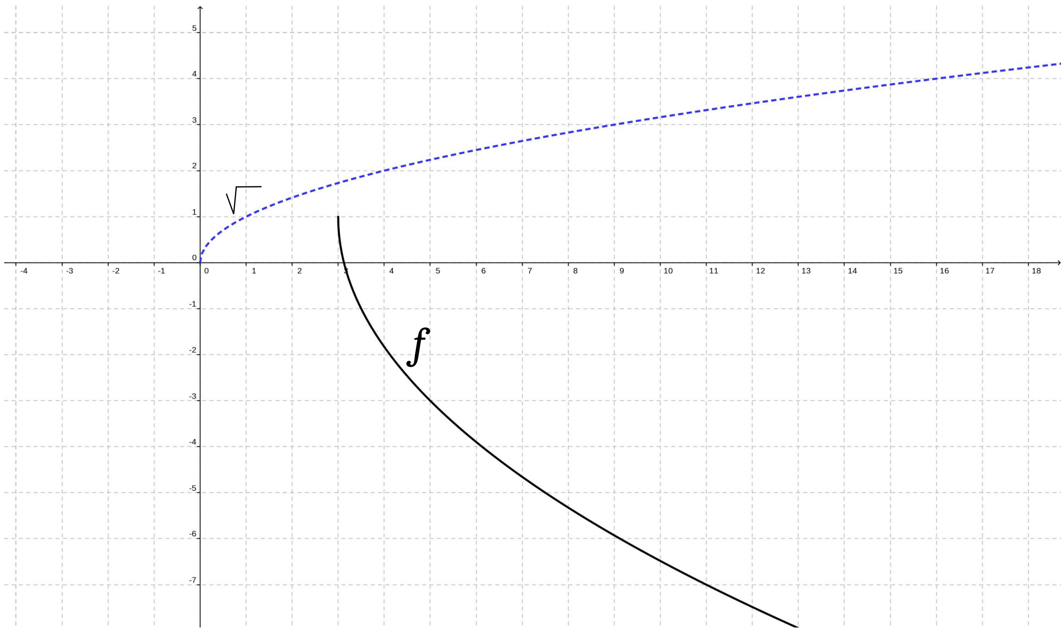


Exercice 7 :
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = k\sqrt{a(x-b)} + c.$$

On donne également, en pointillés, la représentation de la fonction racine.

Déterminer les réels k, a, b, c en vous aidant du graphique. Aucune justification n'est demandée.



Correction :

-On voit qu'il y a une translation de la courbe représentative de la fonction racine vers « le haut (vecteur $\overrightarrow{j}$) et vers « la droite » (vecteur $3\overrightarrow{i}$), donc $c = 1$ et $b = 3$.
-La courbe représentative de la fonction f a un sens de variation inverse de celui de la fonction racine : la fonction racine a été multipliée par un coefficient -1. Ainsi $k = -1$.
-On voit que la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(5; -3)$. Cela implique que $f(5) = -3$.
A ce stade, on sait que $f(x) = -\sqrt{a(x-3)} + 1$.

On cherche donc a tel que $f(5) = -\sqrt{a(5-3)} + 1 = -3$.
On a donc $-\sqrt{2a} = -3 - 1$, soit $\sqrt{2a} = 4$ ou encore $2a = 16$, d'où $a = 8$.

Ainsi : $k = -1$, $a = 8$, $b = 3$ et $c = 1$.