Limites de suites

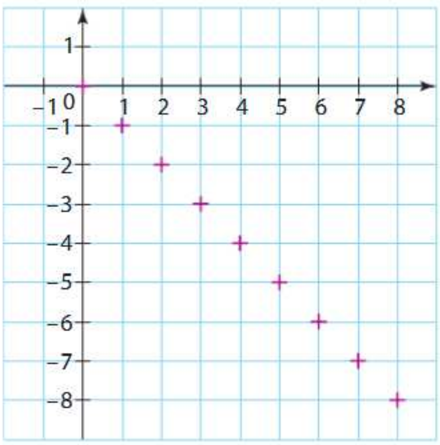
1 Notion de limite d'une suite

1.1 Exemple introductif

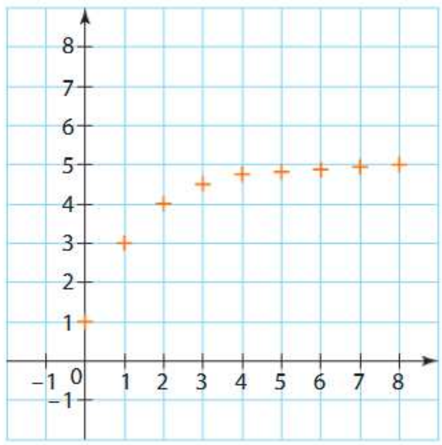
S'intéresser à la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est étudier le comportement des termes u_n quand on donne à n des valeurs aussi grandes que l'on veut, ce qui se dit aussi "quand n tend vers $+\infty$".

Exercice On a représenté ci-dessous différentes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Que se passe-t-il pour les termes u_n quand n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

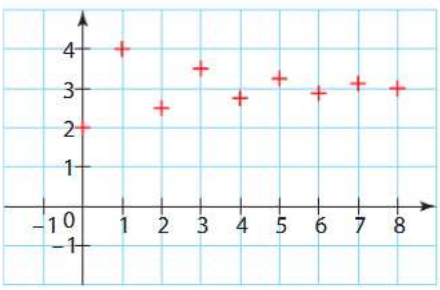
a)



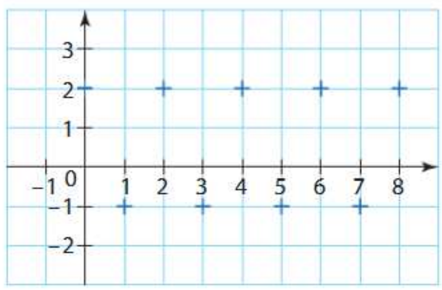
b)



c)



d)



1.2 Limite finie

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par son terme général $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.
Pour étudier le comportement asymptotique d'une suite, il est recommandé de commencer par calculer ses premiers termes et de conjecturer son comportement : sens de variation, signe des termes, évolution des valeurs des termes.

1.2.1 Conjecture

• Donner la valeur de u_1, u_{10}, u_{100} et u_{1000}.

• Déterminer le signe et le sens de variation de la suite (u_n).

• Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, de quelle valeur se rapprochent les termes u_n? On notera ℓ cette valeur.

1.2.2 Une définition

Définition On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ (ou admet ℓ comme limite) si tout intervalle ouvert centré sur ℓ contient **tous les termes** de la suite à partir d'un certain rang. On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

♡ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

1.3 Limite infinie

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par son terme général $u_n = n^2 - n$.

1.3.1 Conjecture

• Donner la valeur de u_1, u_{10}, u_{100} et u_{1000}.

• Déterminer le signe et le sens de variation de la suite (u_n).

• Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, de quelle valeur se rapprochent les termes u_n?

1.3.2 Deux définitions

Définition Soit A un nombre réel. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $[A;+\infty[$ contient **tous les termes** de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Définition Soit A un nombre réel. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty;A]$ contient **tous les termes** de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

♡ $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

2 Bilan

Ce chapitre faisant suite aux limites de fonctions, nous pouvons assez vite arriver aux tableaux récapitulatifs suivants :

SOMME

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

PRODUIT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim_{n\to+\infty} u_nv_n =$	$L\times L'$	∞	∞	F.I.

QUOTIENT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L\neq 0$	L	∞	∞
$\lim_{n\to+\infty} v_n =$	$L'\neq 0$	0	∞	L	0
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.