Correction exercice 18

Exercice : Dans chaque cas, trouver une racine évidente puis résoudre dans $\mathbb{C}$.

$$(E_1): \; z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0 \qquad (E_2): \; z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \qquad (E_3): \; z^3 + 6z^2 + 13z + 10 = 0$$

Exercice (E_1) :

$$z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$$

On cherche une racine évidente entière. On essaie avec $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $z = -1$, $z = -2$, éventuellement $z = i$, etc.

Pour $z = 0$: $0^3 - 6 \times 0 + 12 \times 0 - 7 = -7 \neq 0$, donc $z = 0$ n'est pas une racine évidente.
Pour $z = 1$: $1 - 6 + 12 - 7 = 0$, donc $z = 1$ est une racine évidente. Nous sommes enchantés d'avoir trouvé une racine évidente, mais à quoi cela va nous servir ?

Comme 1 est une racine évidente de l'équation (E_1), on peut donc factoriser notre polynôme par $z - 1$. Comme $z - 1$ est un polynôme du premier degré et comme $z^3 - 6z^2 + 12z - 7$ est un polynôme du troisième degré, cela implique que :

$z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = (z - 1) \times (az^2 + bz + c)$ avec a, b, c des réels à déterminer.

En développant, on trouve : $(z - 1) \times (az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$

On a donc :

$$z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$$

Par **Identification**, on a :

$$\begin{cases} 1 = a \\ -6 = b - a \\ 12 = c - b \\ -7 = -c \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve assez vite (normalement) : $a = 1$, $b = -5$, $c = 7$.

Ainsi $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = (z - 1)(z^2 - 5z + 7)$.

Résolvons $z^2 - 5z + 7 = 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$$

Il y a deux solutions à l'équation $z^2 - 5z + 7 = 0$, qui sont :

$$z = \frac{5 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z = \frac{5 - i\sqrt{3}}{2}$$

Nous avions déjà trouvé une solution à l'équation (E_1), nous venons d'en trouver deux autres. Il y a trois solutions à l'équation (E_1), qui sont :

$$\boxed{S_{E_1} = \left\{1, \; \frac{5 + i\sqrt{3}}{2}, \; \frac{5 - i\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

Exercice (E_2) :

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

On cherche une racine évidente entière. On essaie avec $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, $z = 2$, etc.

Pour $z = 0 : 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \neq 0$ donc $z = 0$ n'est pas une racine évidente.
Pour $z = 1 : 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ donc $z = 1$ n'est pas une racine évidente.
Pour $z = -1 : (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$.
Ainsi, $z = -1$ est une racine évidente.

Comme $z = -1$ est une racine évidente de l'équation (E_2), on peut factoriser notre polynôme par $(z+1)$. On pose :

$$z^3 + z^2 + z + 1 = (z + 1)(az^2 + bz + c)$$

où a, b et c sont des réels à déterminer.

En développant, on obtient :

$$(z + 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c = az^3 + (a + b)z^2 + (b + c)z + c$$

On a donc :

$$z^3 + z^2 + z + 1 = az^3 + (a + b)z^2 + (b + c)z + c$$

Par **identification** des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} 1 = a \\ 1 = a + b \\ 1 = b + c \\ 1 = c \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve : $a = 1$, puis $b = 0$, puis $c = 1$.

Ainsi :

$$z^3 + z^2 + z + 1 = (z + 1)(z^2 + 1)$$

Résolvons $z^2 + 1 = 0$.

$$z^2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad z = i \text{ ou } z = -i$$

Nous avions déjà trouvé une racine à l'équation (E_2), et nous venons d'en trouver deux autres. L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{S_{E_2} = \{-1,\ i,\ -i\}}$$

Exercice (E_3) :

$$z^3 + 6z^2 + 13z + 10 = 0$$

On cherche une racine évidente entière. On essaie avec $z = 0$, $z = -1$, $z = -2$, $z = -5$, etc.

Pour $z = 0 : 0 + 0 + 0 + 10 = 10 \neq 0$.
Pour $z = -1 : (-1)^3 + 6(-1)^2 + 13(-1) + 10 = -1 + 6 - 13 + 10 = 2 \neq 0$.
Pour $z = -2 : (-2)^3 + 6(-2)^2 + 13(-2) + 10 = -8 + 24 - 26 + 10 = 0$.
Ainsi, $z = -2$ est une racine évidente.

Comme $z = -2$ est une racine évidente de (E_3), on peut factoriser le polynôme par $(z + 2)$:

$$z^3 + 6z^2 + 13z + 10 = (z + 2)(az^2 + bz + c)$$

avec a, b et c des réels à déterminer.

En développant, on obtient :

$$(z+2)(az^2+bz+c) = az^3+bz^2+cz+2az^2+2bz+2c = az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$$

On a donc :

$$z^3+6z^2+13z+10 = az^3+(b+2a)z^2+(c+2b)z+2c$$

Par **identification** des coefficients :

$$\begin{cases} 1 = a \\ 6 = b+2a \\ 13 = c+2b \\ 10 = 2c \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$a = 1, \quad b = 4, \quad c = 5$$

Ainsi :

$$z^3+6z^2+13z+10 = (z+2)(z^2+4z+5)$$

Résolvons $z^2+4z+5=0$:

$$\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 5 = 16-20 = -4 < 0$$

$$z = \frac{-4 \pm i\sqrt{4}}{2} = -2 \pm i$$

Nous avions déjà trouvé une solution à (E_3), et nous venons d'en trouver deux autres. L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{S_{E_3} = \{-2,\ -2+i,\ -2-i\}}$$