Devoir flash n°4 (corrigé)

S6M5 - 2025-2026

Exercice 1 : Donner la forme algébrique de $z_1 = \dfrac{2i+1}{3i-1}$, en détaillant votre démarche.

Correction :
On multiplie le numérateur et le dénominateur par le **conjugué** du dénominateur $3i-1$, c'est-à-dire $-3i-1$. On peut aussi mutliplier par $3i+1$, cela fonctionne aussi.

$$z_1 = \frac{2i+1}{3i-1} \times \frac{-3i-1}{-3i-1} = \frac{(2i+1)(-3i-1)}{(3i-1)(-3i-1)}.$$

Développons le numérateur : $(2i+1)(-3i-1) = -6i^2 - 2i - 3i - 1 = -6(-1) - 5i - 1 = 5 - 5i.$

Développons le dénominateur : $(3i-1)(-3i-1) = -9i^2 - 3i + 3i + 1 = -9(-1) + 1 = 10.$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\boxed{z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.}$$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 3z + 4 = 0$.

Correction :
Écrivons le discriminant :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23.$$

Comme $\Delta < 0$, les racines sont complexes conjuguées :

$$z = \frac{3 \pm i\sqrt{23}}{4}.$$

$$\boxed{z_1 = \frac{3}{4} + \frac{i\sqrt{23}}{4}}, \quad \boxed{z_2 = \frac{3}{4} - \frac{i\sqrt{23}}{4}}.$$

Exercice 3 : Soient z et z' deux nombres complexes. Démontrer que :

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

Correction :
Soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Alors :

$$z \times z' = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Le conjugué de ce produit est donc :

$$\overline{z \times z'} = (ac - bd) - i(ad + bc).$$

Calculons maintenant le produit des conjugués :

$$\overline{z} = a - ib, \quad \overline{z'} = c - id,$$

donc :

$$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(c - id) = ac - iad - ibc - bd = (ac - bd) - i(ad + bc).$$

On a bien :

$$\boxed{\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}}$$

Ainsi, la propriété est démontrée.