Limites de fonctions

1 Limite d'une fonction en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[b; +\infty[$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

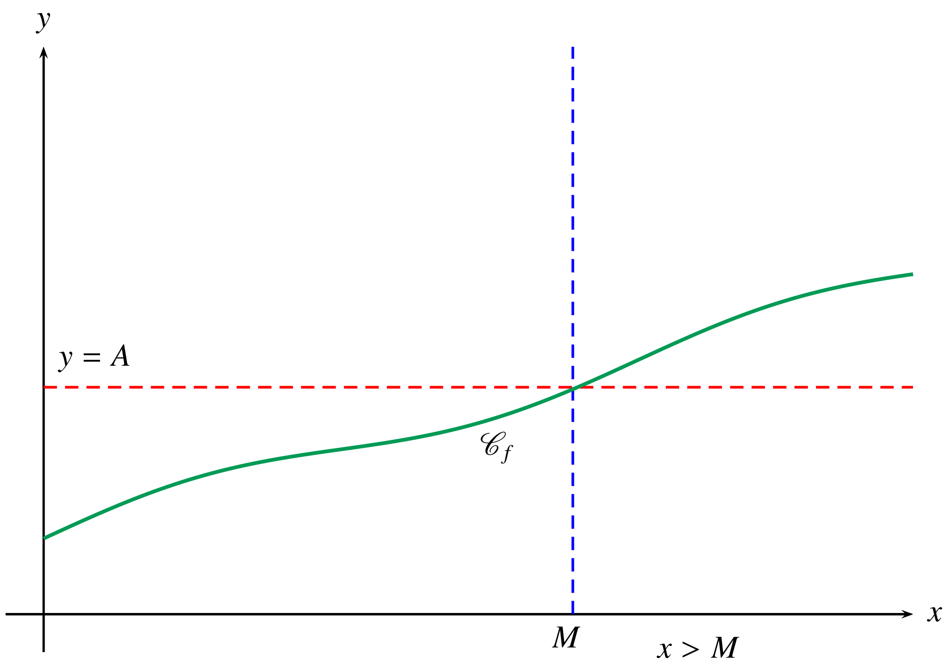
1.1 Limite infinie

Définition

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand. On écrit alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Autrement dit, pour tout réel A, il existe un réel M tel que si $x > M$, alors $f(x) > A$.
Cette définition s'écrit donc de manière symbolique :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad x > M \Rightarrow f(x) > A$$

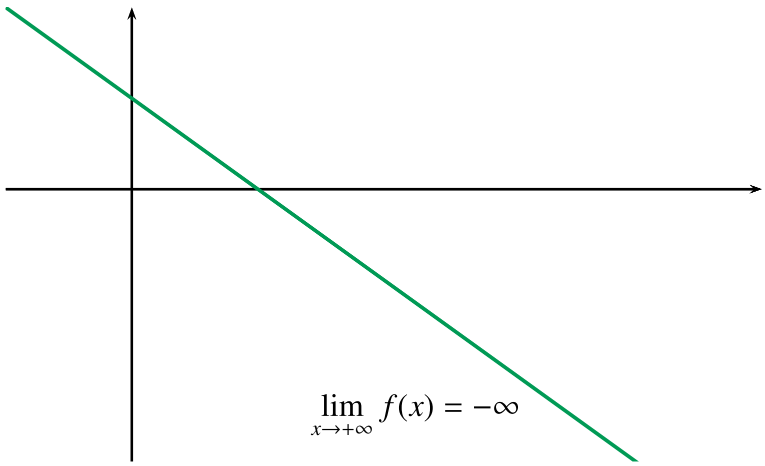


Exemples

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} ax + b = +\infty$, pour $a > 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Définition De même, on peut définir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ par :

Tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.

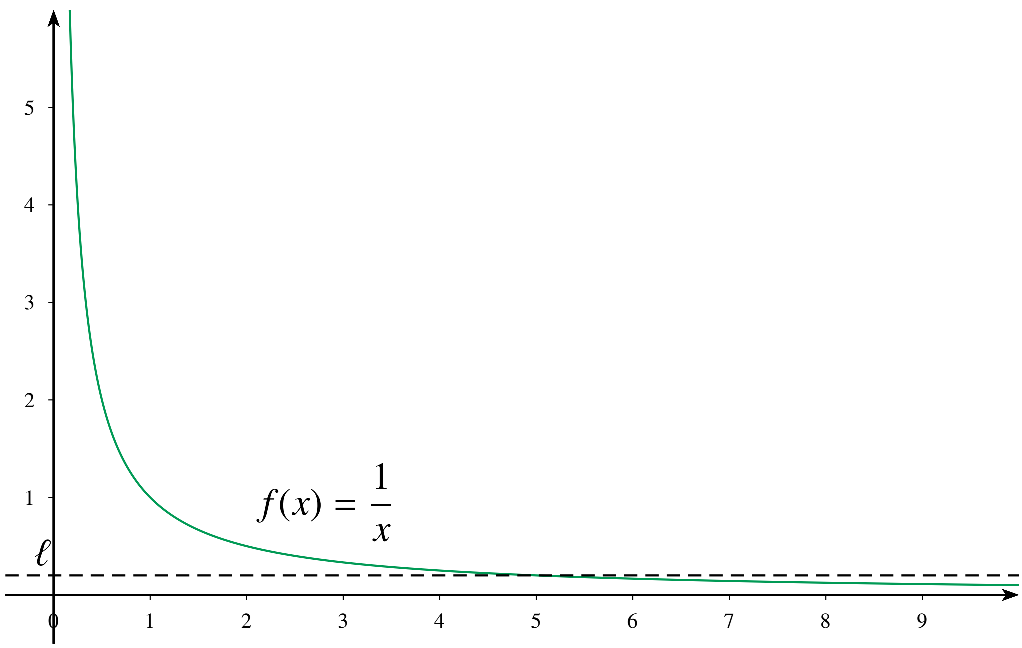


Propriété $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ équivaut à $\lim\limits_{x\to+\infty} (-f(x)) = +\infty$.

1.2 Limite finie

Définition On dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$ pour x assez grand. On écrit alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
Autrement dit, pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) \in I$.

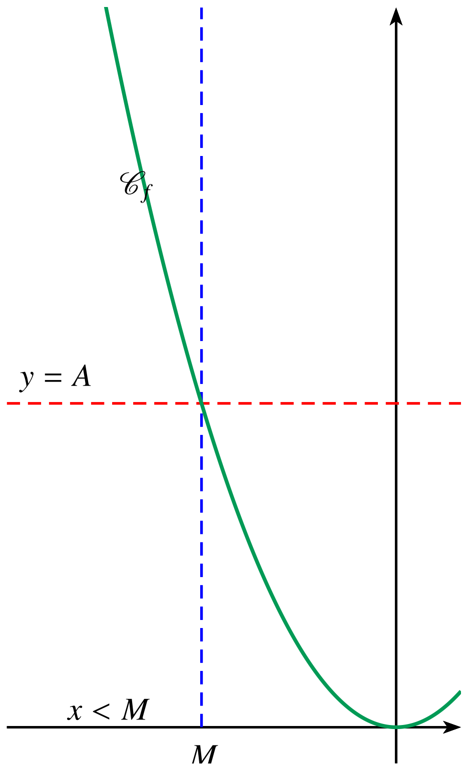
Exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.



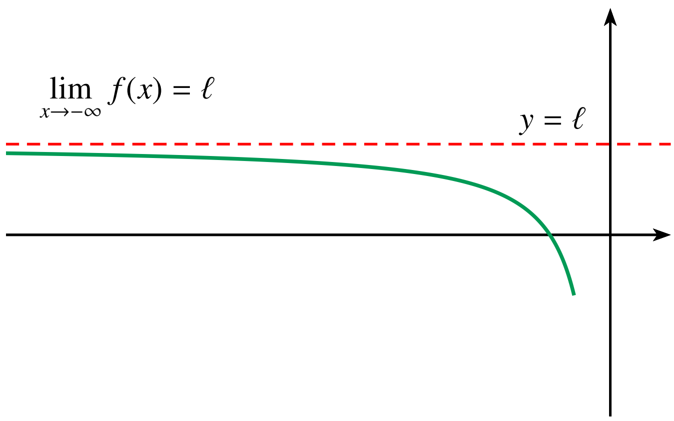
2 Limite d'une fonction en $-\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty; b[$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
Contrairement aux suites, on peut s'intéresser au comportement d'une fonction en $-\infty$, c'est-à-dire que l'étude de $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ a du sens. On peut alors donner deux nouvelles définitions :

Définition On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x **négatif** et assez grand **en valeur absolue** (autrement dit « pour x assez négatif »). On écrit alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.



Définition On dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$ pour x « assez négatif ». On écrit alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.



Exemples

— $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et n **pair**.

— $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarques :

— De même, on peut définir $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

— Lorsqu'elle existe, une limite de fonction est **unique**.

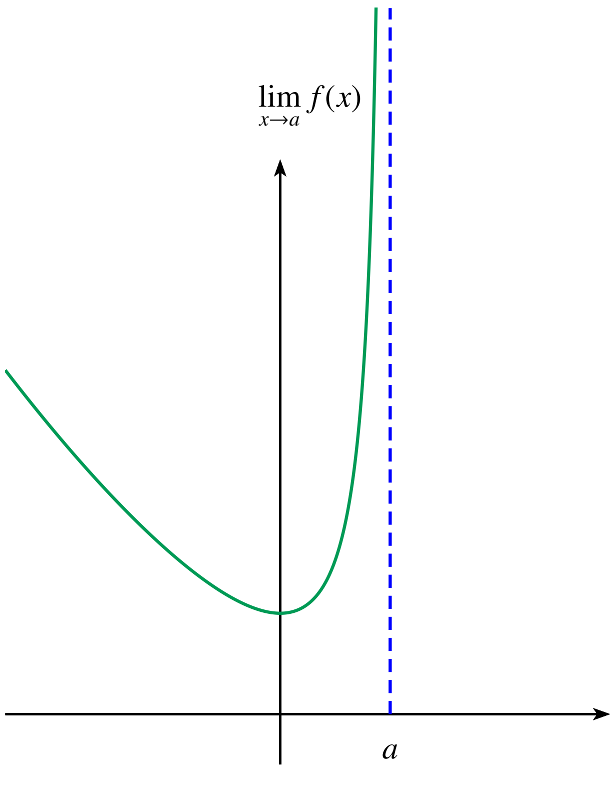
3 Limite d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un ensemble D, $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \in D$ OU a est une borne de D.

3.1 Limite infinie

Définition

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a lorsque tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On écrit alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.



Exemple

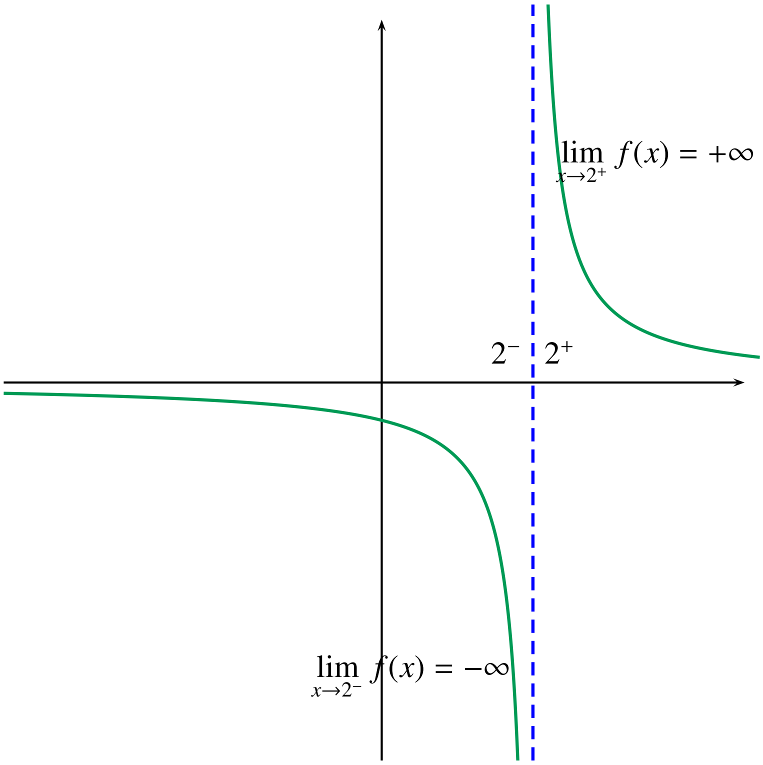
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

3.2 Limite à droite, limite à gauche

L'exemple précédent peut nous mettre la puce à l'oreille : quelle est la valeur (si elle existe) de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$?

On doit dans ce cas spécifier deux cas : « avant » 0 et « après » 0. On définit ainsi deux limites différentes : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x}$ que l'on peut noter aussi $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Définition On dit que f admet une limite **à droite** de a lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$. On note cette limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.



Remarques :

- De même, on définit la limite de f à gauche de a, en considérant $x < a$ et l'on note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.
- On ne distingue les limites de f à droite et à gauche de a que lorsque celles-ci sont différentes. On peut par ailleurs prendre comme définition de continuité d'une fonction f en $a \in I$ avec I intervalle ouvert contenu dans D_f, le fait que la limite à gauche et à droite de f en a est la même, que $f(a)$ existe et que ces deux limites sont égales à $f(a)$.

3.3 Limite finie en un point

Intuitivement, une fonction f tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$ lorsque $f(x)$ est aussi proche de ℓ pourvu que x soit suffisamment proche de a.

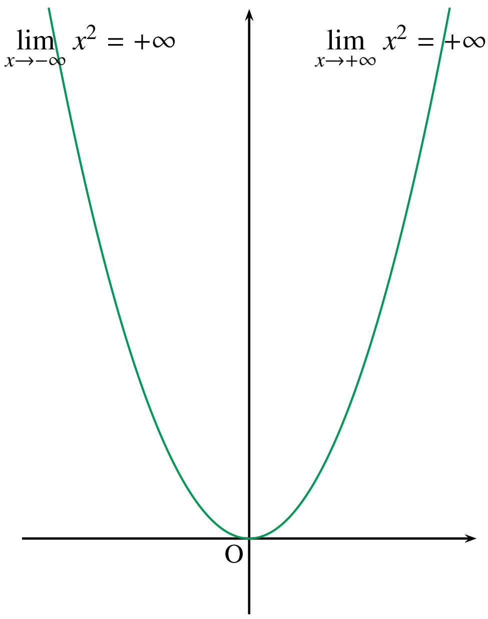
Propriété Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- Si a est positif, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- Si P est un polynôme, alors $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Si F est une fonction rationnelle (définie en a), c'est-à-dire le quotient de deux polynômes, alors $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$.

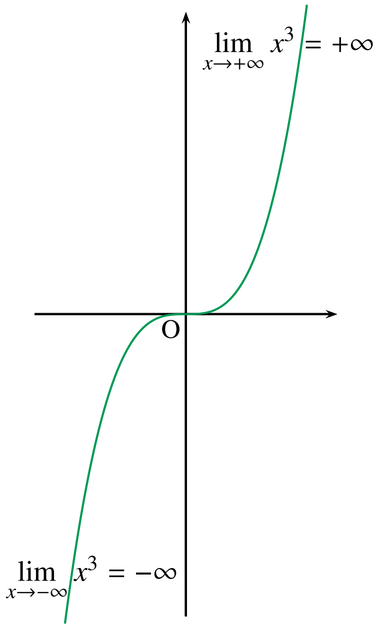
Exemples

1. $\lim\limits_{x \to 2} 4x^2 - 6 = 4 \times (2^2) - 6 = 10$.
2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{2x-2} = \dfrac{2 \times (-1) + 1}{2 \times (-1) - 2} = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$.

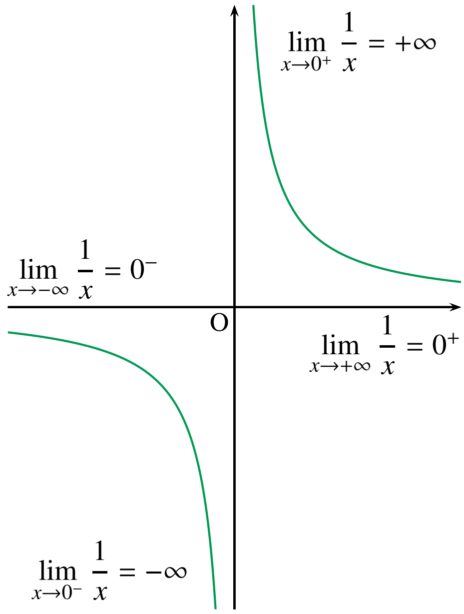
4 Limites des fonctions usuelles à connaître par coeur



fonction carré



fonction cube



fonction inverse

5 Asymptotes parallèles aux axes

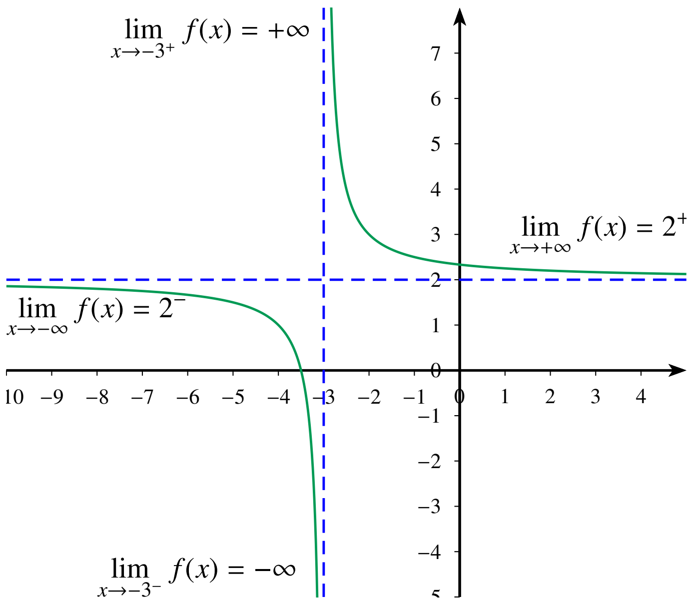
Définition

- Lorsque la limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) d'une fonction f est égale au réel l, la droite d'équation $y = l$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
- Lorsque la limite en un réel a d'une fonction f est infinie, la droite d'équation $x = a$ est appelée **asymptote verticale** à la courbe $\mathscr{C}$.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+3}$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$, donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

De même $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = -\infty$, donc la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.



6 Limites de fonctions usuelles

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} tan\ x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+ \qquad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} tan\ x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0^-$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to0+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to0-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

7 Opérations sur les limites

Dans toute cette section, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell' \in \mathbb{R}$, $a \in [-\infty\,;\,+\infty]$ et f et g sont deux fonctions.

7.1 Limites de sommes

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

$F.I.$ signifie « forme indéterminée ». On ne peut pas conclure et plusieurs cas peuvent se présenter. Il faut étudier plus en détail la fonction pour « lever l'indétermination » et trouver la limite.

Exercice

1. Étudier les limites en 0 et $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$.
2. Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 3\,x^4 + x^3 + 2\,x + 1$$

7.2 Limites de produits

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x))$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$	$F.I.$	$\pm\infty$

Exercice

1. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - \sqrt{x}$.
2. Étudier la limite en $-\infty$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3\,x^4 + x^3 + 2\,x + 1$.

Propriété En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

7.3 Limites de quotients

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	0^+ ou 0^-	0	$\pm\infty$	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	*F.I.*	0^+ ou 0^- ou 0	$\pm\infty$	*F.I.*

Exercice

1. Étudier la limite en $\frac{1}{3}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{2\,x-5}{3\,x-1}$.
2. Étudier les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2-3}{\sqrt{x}}$.
3. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par

$$h(x) = \frac{3\,x^2 - 5\,x + 1}{x+2}$$