Nombres complexes

1 Introduction

1.1 Approche historique

Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro propose une formule donnant une solution aux équations du 3$^{\text{ème}}$ degré de la forme $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

Une formule plus générale sera élaborée par Tartaglia et Jérôme Cardan. A la fin du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture pose un problème majeur puisqu'elle amène à considérer le nombre $\sqrt{-1}$ qui n'a encore aucun sens. Néanmoins, Bombelli va plus loin, il remarque en utilisant les règles de calcul usuelles que :

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Par conséquent, il obtient : $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.
Or $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$. Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes . . .

1.2 Approche ensembliste

L'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle admet une solution -1 dans un ensemble plus grand $\mathbb{Z}$.
De même, l'équation $3x = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais elle admet $\frac{1}{3}$ comme solution dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ plus grand que $\mathbb{Z}$.
Et puis, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans $\mathbb{R}$ pour en trouver.
En clair, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) pour en trouver consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances, l'ensemble numérique le plus grand est $\mathbb{R}$. Pourtant l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ . . .
On va donc dans ce chapitre imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté i (i comme imaginaire) et vérifiera $i^2 = -1$. L'équation précédente possédera alors deux solutions :

$$x^2 + 1 = 0 \iff (x + i)(x - i) = 0 \iff x = i \text{ ou } x = -i$$

1.3 Éléments d'histoire

En 1637, Descartes propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est Gauss en 1831 qui le premier les nomme les « nombres complexes ».
Euler, déclarant que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction de la définition, introduit la notation i (comme imaginaire) en 1777 pour le nombre qui vérifie $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ apparaît alors : ce sont les nombres de la forme $a + ib$, avec a et b réels. Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ sont conservées.
Les nombres imaginaires prennent alors leur statut officiel de nombres, avec notamment une représentation géométrique de chaque nombre $x + iy$ (avec x et y réels) par le point du plan de coordonnées $(x; y)$.
Ils ont notamment servi pour formaliser la théorie de la relativité d'Einstein (1905). À notre niveau, ils sont utiles en géométrie et pour la résolution d'équations.

2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé **ensemble des nombres complexes** qui vérifie les propriétés suivantes :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe, noté i, tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $x + iy$ avec x et y des réels.

Exemples

$0, 3, \dfrac{4}{3}, 1 + 2i, 2 - 3i, i, -2i$ sont des nombres complexes.

Définition

L'écriture $x + iy$ (avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) d'un nombre complexe z s'appelle la **forme algébrique** d'un complexe.

- Le réel x est la **partie réelle** du nombre complexe z, et se note $Re(z)$.
- Le réel y est la **partie imaginaire** du nombre complexe z, et se note $Im(z)$.
- Un nombre complexe de forme algébrique iy avec $y \in \mathbb{R}$ est appelé un **imaginaire pur**.

Exemples

$Re(3 + 2i) = 3$, $Im(4 - 6i) = -6$, $Re(3i) = 0$ et $Im(3i) = 3$.

$15i$ et $-3i$ sont des imaginaires purs.

Conséquences : Pour tout nombre complexe z :

$$z \text{ est un nombre réel} \iff Im(z) = 0$$

$$z \text{ est un imaginaire pur} \iff Re(z) = 0$$

Propriété Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Exercices

1. Montrer que $z^2 - 6z + 25 = (z-3)^2 + 16$.
   $(z-3)^2 + 16 = z^2 - 6z + 9 + 16 = z^2 - 6z + 25$
2. En déduire les solutions de l'équation $z^2 - 6z + 25 = 0$.
   $z^2 - 6z + 25 = 0 \Longleftrightarrow (z-3)^2 + 16 = 0$ soit $(z-3)^2 = -16 = (4i)^2$ d'où $z - 3 = 4i$ ou $z - 3 = -4i$
   On a donc $z = 3 + 4i$ ou $z = 3 - 4i$.

Exercice Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{-i}{z+1} = 2$.

3 Opérations sur les complexes

Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

Définition L'opposé d'un nombre complexe z est le complexe noté $-z$ défini par $-z = -x - iy$

Propriétés

1. **Somme** de complexes : $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.
2. **Produit** de complexes : $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

<u>démonstration</u> :

Remarque : $(x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$.

Définition et Propriétés

- Tout nombre complexe non nul z de la forme $x + iy$ admet un inverse noté $\dfrac{1}{z}$ de forme algébrique $\dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{-y}{x^2+y^2}$.
- On définit le quotient $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$ avec $z' \neq 0$.

Propriété

Propriété : $zz' = 0 \Longleftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

<u>démonstration</u> :

Exercices

Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés. Précisez, le cas échéant, s'il est réel ou imaginaire pur.

1) $z_1 = i(1-4i) + 3(2-i)$ **2)** $z_2 = (3-i)^2 + 6i$

3) $z_3 = \dfrac{3}{1-i}$ **4)** $z_4 = \dfrac{1+2i}{2-i}$

4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition

On appelle **conjugué** du nombre complexe $z = x + iy$ (avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) le nombre complexe noté $\overline{z}$ de forme algébrique $x - iy$. On note donc $\overline{z} = x - iy$.

Conséquences :

- $z + \overline{z} = 2 \times Re(z)$
- $z - \overline{z} = 2 \times Im(z)$
- z est un réel $\Longleftrightarrow \overline{z} = z$
- z est un imaginaire pur $\Longleftrightarrow \overline{z} = -z$

Propriétés

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
3. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
4. Si $z \neq 0$, alors $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exercices

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 3i$ **2)** $z_2 = -i(1+4i)$

3) $z_3 = (3-5i)^3$ **4)** $z_4 = \dfrac{2i}{i+3} - \dfrac{3}{2+3i}$

5 Équations du second degré à coefficients réels

5.1 Equations du type $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}$

- Si $a \geqslant 0$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$ (cas déjà connu depuis le collège).
- Dans le cas contraire, on a $a < 0$, on peut donc considérer le nombre $i\sqrt{-a}$ qui vérifie l'équation (1) : $x^2 = a$, on a alors :

$$\begin{aligned}
(1) &\iff & x^2 - a = 0 \\
(1) &\iff & x^2 - \left(i\sqrt{-a}\right)^2 = 0 \\
(1) &\iff & \left(x - i\sqrt{-a}\right)\left(x + i\sqrt{-a}\right) = 0 \\
(1) &\iff & x = i\sqrt{-a} \quad \text{ou} \quad x = -i\sqrt{-a}
\end{aligned}$$

Ainsi $-i\sqrt{-a}$ est une solution de cette équation, et ce sont les deux seules solutions.

D'où le résultat suivant :

Propriétés

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:
- Si $a \geqslant 0$, ce sont les réels suivants : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants : $x = i\sqrt{-a}$ ou $x = -i\sqrt{-a}$

Exercices

Résolvons dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $x^2 = -3$
2. $z^2 + \dfrac{3}{4} = 0$
3. $x + \dfrac{1}{x} = 0$

Correction :

1. $x^2 = -3 \Longleftrightarrow x = i\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -i\sqrt{3}$
   $S = \left\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\right\}$.
2. $z^2 + \dfrac{3}{4} = 0 \Longleftrightarrow z^2 = -\dfrac{3}{4} \Longleftrightarrow z = i\sqrt{\dfrac{3}{4}} \quad \text{ou} \quad z = -i\sqrt{\dfrac{3}{4}} \Longleftrightarrow z = \dfrac{i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \dfrac{-i\sqrt{3}}{2}$
   $S = \left\{\dfrac{i\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$.
3. $x + \dfrac{1}{x} = 0$
   Valeur interdite : $x = 0$.
   Pour $x \neq 0$: $x + \dfrac{1}{x} = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{1}{x} \Longleftrightarrow x^2 = -1 \Longleftrightarrow x = i \quad \text{ou} \quad x = -i$
   $S = \{i; -i\}$.

5.2 Equations du type $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) lorsque $\Delta \geqslant 0$ sont

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. On suppose que $\Delta < 0$.
   $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = 0$
   $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$
   $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 2 \times x \times \dfrac{b}{2a} + \dfrac{c}{a} = 0$
   $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{c}{a} = 0$
   $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{4ac}{4a^2} = 0$
   $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$
   $ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$
   On remarque que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0 \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Longleftrightarrow x = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

D'où le résultat suivant :

Théorème

L'équation $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c réels ($a \neq 0$), en notant $\Delta = b^2-4ac$, possède deux solutions (distinctes ou confondues) dans $\mathbb{C}$:

- Si $\Delta \geqslant 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$x_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas (quel que soit le signe de Δ), on obtient la factorisation suivante :

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Exercices

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

$$2z^2-3z+4=0 \qquad x^2-2x+2=0 \qquad 2z^4+z^2-10=0$$

Correction :

1. $2z^2-3z+4=0$
   $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times 2\times 4 = 9-32 = -23 < 0$
   Donc $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{3-i\sqrt{23}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{3+i\sqrt{23}}{4}$
   $S = \left\{\dfrac{3-i\sqrt{23}}{4};\dfrac{3+i\sqrt{23}}{4}\right\}$.
2. $x^2-2x+2=0$
   $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times 1\times 2 = 4-8 = -4 < 0$
   Donc $x_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2-i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{2-2i}{2} = 1-i$ et $x_2 = \overline{x_1} = 1+i$
   $S = \{1-i;1+i\}$.
3. $2z^4+z^2-10=0$
   On pose $Z=z^2$ donnant $z^4=Z^2$. Ainsi l'équation $2z^4+z^2-10=0$ s'écrit $2Z^2+Z-10=0$.
   $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times 2\times(-10) = 1+80 = 81 = 9^2 > 0$.
   Donc $Z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-9}{4} = \dfrac{-8}{4} = -2$ et $Z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+9}{4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$ $(=2,5)$
   On doit alors résoudre $z^2 = Z_1 \iff z^2 = -2 \iff z_1 = i\sqrt{2}$ et $z_2 = -i\sqrt{2}$
   et $z^2 = Z_2 \iff z^2 = \dfrac{5}{2} \iff z_3 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ et $z_4 = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}$
   On peut vérifier aisément que z_1, z_2, z_3, z_4 sont bien solutions de l'équation $2z^4+z^2-10=0$.
   $S = \left\{i\sqrt{2};-i\sqrt{2};\sqrt{\dfrac{5}{2}};-\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right\}$

Remarque : En définitive, si $\Delta > 0$, les deux racines sont réelles et distinctes ;
si $\Delta = 0$, il y a une racine double réelle (les deux racines sont confondues) ;
si $\Delta < 0$, les deux racines sont complexes non réelles conjuguées et distinctes.