Nombres complexes

S6M5 - 2025-2026

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -i$.

On pose $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Nous verrons à l'avenir une résolution plus rapide, mais il faudra attendre la S7.

$$z^3 = (a+ib)^3 = a^3 + 3a^2(ib) + 3a(ib)^2 + (ib)^3 = a^3 + 3a^2ib + 3a(i^2b^2) + i^3b^3 = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3)$$

On a donc $z^3 = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3)$ et on sait que $z^3 = 0 - 1 \times i$.

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires (comme dans l'exercice du jour), on obtient :

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 0 \\ 3a^2b - b^3 = -1 \end{cases}$$

Nous pouvons aussi écrire ce système sous la forme :

$$\begin{cases} a(a^2 - 3b^2) = 0 \\ 3a^2b - b^3 = -1 \end{cases}$$

1. Cas 1 : $a = 0$
Alors la première équation est vérifiée et la seconde devient :

$$-b^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\boxed{z_1 = i}$$

Vérification toujours utile : $i^3 = -i$. Nous sommes des gros balèzes, passons donc à la suite.

2. Cas 2 : $a \neq 0$
En divisant par a la première équation (nous pouvons, car on suppose ici que $a \neq 0$), on obtient alors dans la première équation :

$$a^2 - 3b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 3b^2 \Rightarrow \quad (a^2 - 3b^2) = 0 \Rightarrow \quad (a - \sqrt{3}b)(a + \sqrt{3}b) = 0$$

soit $a = \sqrt{3}\,b$ ou $a = -\sqrt{3}\,b$. En remplaçant a dans la première équation, on obtient alors dans la deuxième équation :

$$3a^2b - b^3 = -1$$

(a) Si $a = \sqrt{3}b$:

$$3(\sqrt{3}b)^2b - b^3 = 9b^3 - b^3 = 8b^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$a = \sqrt{3}b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}$$

(b) Si $a = -\sqrt{3}b$:

$$3(-\sqrt{3}b)^2 b - b^3 = 9b^3 - b^3 = 8b^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$a = -\sqrt{3}b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}$$

Conclusion : Nous trouvons ainsi trois solutions (dans l'ensemble des nombres complexes) :

$$\boxed{z_1 = i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}$$