Exercice 1

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$z_1 = i - (2 - 5\,i) \qquad z_2 = 3\,(1 + 2\,i - (4 + i)) \qquad z_3 = 2\,i^2 + i + 2\,(1 - 2\,i) \qquad z_4 = i^3 - 1$$

Exercice 2

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$z_1 = (4 + 5\,i)(2 - i) \qquad z_2 = (1 + 3\,i)(3 - 4\,i) + 7 \qquad z_3 = 2(1 + 2\,i)^2 \qquad z_4 = (5 - 3\,i)(5 + 3\,i)$$

$$z_5 = 3 - (2 + 3\,i)(4 + i) \qquad z_6 = (2 + i)(3 - 5\,i)(1 + 2\,i) \qquad z_7 = (5 - i)^3 \qquad z_8 = \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Exercice 3

Soient $z_1 = 3 - 2\,i$ et $z_2 = 5 + i$. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 \times z_2$ *b)* $3\,z_1 - 4\,z_2$ *c)* $z_1^2 - z_2^2$ *d)* $i\,z_1 - (2 + i)\,z_2$

Exercice 4

Soit $z = a + i\,b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $P(z) = z^2 - i$.

1. Exprimer les parties réelle et imaginaire de $P(z)$ en fonction de a et b.
2. En déduire la forme algébrique de $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 5

Calculer $A = i^{2022} + i^{2023} + i^{2024} + i^{2025}$.

Exercice 6

Donner le conjugué des nombres suivants sous forme algébrique.

$$z_1 = 3 + 4\,i \qquad z_2 = 5 - 2\,i \qquad z_3 = 3\,i \qquad z_4 = 2\,i - (4 + 5\,i) \qquad z_5 = (3 - 4\,i)(5 + i)$$

Exercice 7

Écrire le conjugué des nombres suivants sans nécessairement donner leur forme algébrique.

$$z_1 = \frac{1}{3\,i} \qquad z_2 = \frac{2 - 4\,i}{3 + 2\,i} \qquad z_3 = (4 + 5\,i)^2 \qquad z_4 = \frac{(3 - 4\,i)(4 + i)}{2 + 3\,i}$$

Exercice 8

On suppose que $a + i\,b = (c + i\,d)^n$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Montrer en utilisant les règles de calculs avec les conjugués que $a^2 + b^2 = \left(c^2 + d^2\right)^n$.

Exercice 9 ....

Montrer que si z_0 est une racine d'un polynôme $P(z)$ de degré 2 à coefficients réels, alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.

Exercice 10 ....

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$z_1=\frac{4+i}{2+i}\qquad z_2=\frac{1}{2-i}\qquad z_3=\frac{2-4\,i}{1+3\,i}\qquad z_4=\frac{2\,i}{i-\sqrt{2}}\qquad z_5=\frac{3-6\,i}{3+i}+\frac{4}{3-i}$$

$$z_6=\frac{1+2\,i}{1-2\,i}\qquad z_7=\frac{7}{2\,i}+\frac{1}{z_2}\qquad z_8=3\,i+\frac{4\,i}{3-5\,i}\qquad z_9=\frac{\sqrt{5}-i}{3-i\sqrt{2}}\qquad z_{10}=\frac{4-6\,i}{2-3\,i}\times\frac{1+3\,i}{3+2\,i}$$

Exercice 11 ....

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. Donner les solutions sous forme algébrique.

a) $(1+i)\,z=3-i$ *b)* $2\,z+1-i=i\,z+2$ *c)* $(2\,z+1-i)(i\,z+3)=0$

d) $\dfrac{z+i}{z-i}=2\,i$ *e)* $(i\,z+1)(z+3\,i)(z-1+4\,i)=0$ *f)* $(4+z)(5+z)=4\,i+z^2$

g) $5\,z+5=i\,z+3+2\,i$ *h)* $4\,iz+2\,i=1-z+i$ *j)* $\dfrac{z}{i+1}+3=\dfrac{z}{i-1}-3$

Exercice 12 ....

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. Donner les solutions sous forme algébrique.

a) $z+3+i=2\,\overline{z}+7+3\,i$ *b)* $2\,z-4=5\,i+4\,\overline{z}$ *c)* $z\,\overline{z}=z+2$

d) $5+3\,i\,z-4\,i=2\,\overline{z}-7$ *e)* $12\,z+3\,i=5\,i\,\overline{z}-2$ *f)* $\overline{z}=i\,z$

g) $(2\,z+1-i)(i\,\overline{z}+i-2)=0$ *h)* $z+2\,i\,\overline{z}=1-i$ *j)* $z-2\,\overline{z}+2=0$

Exercice 13 ....

Résoudre les systèmes d'équations suivants dans $\mathbb{C}^2$. Donner les solutions sous forme algébrique.

a) $\begin{cases} z_1+z_2=1+4\,i \\ z_1-z_2=1-2\,i \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2\,z_1+3\,z_2=15+7\,i \\ z_1-z_2=-2+i \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2\,z_1-z_2=9\,i \\ z_1+i\,z_2=3+i \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\,i\,z_1+z_2=2\,i \\ 3\,z_1-i\,z_2=1 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 3\,z_1+z_2=1-7\,i \\ i\,z_1+2\,z_2=11\,i \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} 2\,z_1+z_2=4 \\ 2\,i\,\overline{z_1}-\overline{z_2}=0 \end{cases}$

Exercice 14 ....

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. Donner les solutions sous forme algébrique.

a) $z^2-4\,z+8=0$ *b)* $2\,z^2+3\,z-5=0$ *c)* $-z^2+2\,z-1=0$

d) $2\,z^2+2\,z+5=0$ *e)* $z^2=-20$ *f)* $z^2+2\,i\,z=0$

g) $(-2\,z+1)(z-1)=1$ *h)* $i\sqrt{3}\,z^2-6\,z=0$ *j)* $8\,z^3-2\,z^2+5\,z=0$

Exercice 15

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. Donner les solutions sous forme algébrique.

a) $z^2 - 2\,(1+\sqrt{2})\,z + 2\,(\sqrt{2}+2) = 0$ *b)* $\dfrac{z-8}{z-3} = z$ *c)* $\dfrac{1}{z} + 2\,z = 0$

d) $z^4 - 2\,z^2 - 8 = 0$ *e)* $\dfrac{z}{z-1} = \dfrac{1}{z}$ *f)* $\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + 2 = 0$

g) $z^2 + 2\,\overline{z} + 1 = 0$ *h)* $z^3 + z^2 + 2\,z = 0$ *j)* $8\,z^3 - 8\,z^2 + z - 1 = 0$

Exercice 16

Trouver les complexes p et q tels que l'équation $z^2 + p\,z + q = 0$ admette $1 + 2\,i$ et $3 - 5\,i$ pour solutions.

Exercice 17

$$(E) \ : \ z^3 + 4\,z^2 + z - 6 = 0$$

1. Montrer que -3 est une solution de l'équation (E).
2. Résoudre alors l'équation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 18

Dans chaque cas trouver une racine évidente puis résoudre dans $\mathbb{C}$.

$(E_1) \ : \ z^3 - 6\,z^2 + 12\,z - 7 = 0$ $(E_2) \ : \ z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ $(E_3) \ : \ z^3 + 6\,z^2 + 13\,z + 10 = 0$

Exercice 19

$$(E) \ : \ z^3 + (i-6)z^2 + (13 - 6\,i)z + 13\,i = 0$$

1. Montrer que $-i$ est une solution de l'équation (E).
2. Résoudre alors l'équation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 20

$$P(z) = z^3 + 5\,z^2 + 9\,z + 45$$

1. Montrer que P admet deux racines imaginaires pures que l'on explicitera.
2. En déduire une factorisation de $P(z)$.

Exercice 21

$$4\,z^3 - 6\,i\,\sqrt{3}\,z^2 - 3\,(3 + i\,\sqrt{3})z - 4 = 0$$

Cette équation admet une solution réelle. Laquelle ?