S6MA5 - 2025-2026 (Chapitre Suites, feuille d'exercices n°2)

Exercices

Exercice 1 (suite de Syracuse) :

Une suite de Syracuse est une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre entier strictement positif ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et l'on ajoute 1. On répète ensuite le procédé.

1) On choisit 10 comme nombre de départ. Déterminer les termes suivants de la suite de Syracuse.
2) On choisit 25 comme nombre de départ. Déterminer les termes suivants de la suite de Syracuse.
3) On choisit 80 comme nombre de départ. Déterminer les termes suivants de la suite de Syracuse.

La conjecture de Syracuse, encore appelée conjecture de Collatz, est la conjecture selon laquelle la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.

Exercice 2 (suite de Fibonacci) :

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.

Exercice 3 (Nombres de Mersenne) :

Les nombres de Mersenne sont définis par $M_n = 2^n - 1$

1) Calculer les 10 premiers nombres de Mersenne.
2) Parmi ces premiers termes, lesquels sont des nombres premiers ?

Remarque : on ignore si parmi les nombres de Mersenne, il y en a une infinité qui sont premiers. Il y en a actuellement 52 de connus, le plus grand connu à ce jour est $2^{136279841} - 1$.

Exercice 4 (suite de Recamán) :

On appelle suite de Recamán la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} - n \text{ s'il n'apparait pas encore, } u_n = u_{n-1} + n \text{ sinon} \\ u_{n-1} \geqslant n \text{ dans tous les cas} \end{cases}$$

Calculer les 10 premiers termes de la suite.

Exercice 5 (Héron d'Alexandrie) : Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{2}{u_n}), \forall n > 0 \end{cases}$$

Calculer les 5 premiers termes de la suite.