Suites

1 Introduction

Dès l'Antiquité, **Archimède de Syracuse** (-287;-212) met en oeuvre une procédure itérative (une procédure que l'on répète) pour approximer le nombre π. Il encadre un cercle à l'aide de polygones réguliers inscrits et circonscrits (à l'intérieur et à l'extérieur d'un cercle), dont il double progressivement le nombre de côtés. Cette méthode produit deux **suites** numériques — l'une croissante, l'autre décroissante — convergeant (se rapprochant de plus en plus) vers 2π. Sans le formuler explicitement, Archimède pose ainsi les bases de la notion de suite.

À partir de la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle, des procédés similaires sont utilisés pour résoudre numériquement des équations ou estimer des grandeurs comme des longueurs ou des aires. Il faudra toutefois attendre le début du XIX$^{\text{e}}$ siècle pour qu'un formalisme rigoureux soit établi, notamment grâce au mathématicien français **Augustin-Louis Cauchy** (1789–1857), qui introduit la définition moderne de la convergence et généralise l'usage de la notation indicielle : $u_0, u_1, u_2, \ldots$

Exercice

Compléter les suites suivantes :

1, 2, 4, 8, 16, ...

1, 4, 7, 10, 13, ...

En mathématiques, une suite u est une liste ordonnée de nombres réels. Les éléments de cette liste sont appelés **termes** de la suite, et sont repérés par leur **rang** dans la liste.

Le 1$^{\text{e}}$ terme de la suite u est souvent noté u_0 (ou u_1).
Le 2$^{\text{e}}$ terme de la suite u est souvent noté u_1 (ou u_2).
...
Le n-ième terme de la suite u est souvent noté u_n ou $u(n)$.
Le terme précèdent u_n est u_{n-1}, le suivant est u_{n+1}.

On a donc :

$$\underbrace{u}_{\text{nom de la suite}} = \left(\underbrace{u_0}_{1^{\text{er}}\text{ terme}} ; \underbrace{u_1}_{2^{\text{nd}}\text{ terme}} ; u_2 ; \ldots ; u_{n-1} ; \underbrace{u_n}_{\text{terme de rang } n} ; u_{n+1} ; \ldots \right)$$

2 Généralités sur les suites

2.1 Définition

Définition

Une **suite numérique** est une liste ordonnée de nombres réels.
On peut lui associer une fonction :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

Pour simplifier, on notera souvent la suite u par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore (u_n).

2.2 suite définie de manière explicite : u_n en fonction de n

Une suite (u_n) peut être définie par une formule donnée explicitement, permettant d'exprimer u_n en fonction de n, c'est à dire de trouver une fonction f telle que $u_n = f(n)$.

Exemples

1) Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 1$. On a donc $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x + 1$ (f est définie sur $\mathbb{R}$).
On trouve facilement $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, etc.

2) Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. On a donc $u_n = g(n)$ avec $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ (g est définie sur $\mathbb{R}$).
On trouve facilement $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{5}$, etc.

On verra plus loin que ce type de suite a un sens de variation facilement exploitable, lorsque la fonction f est **monotone**.

2.3 suite définie par récurrence, par exemple u_{n+1} en fonction de u_n

Une suite (u_n) peut être construite à partir d'un rang donné et à partir d'une **relation de récurrence** permettant d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} revient donc à trouver une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemples

1) Soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$. On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 3x + 2$.
On trouve alors $u_1 = 3 \times 1 + 2 = 5$, $u_2 = 3 \times 5 + 2 = 17$, etc.

2) Soit v_n la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sqrt{(v_n)^2 + 1}$. On a donc $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
On trouve alors $v_1 = \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$, $v_2 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$, etc.

3 Représentation graphique d'une suite

Définition

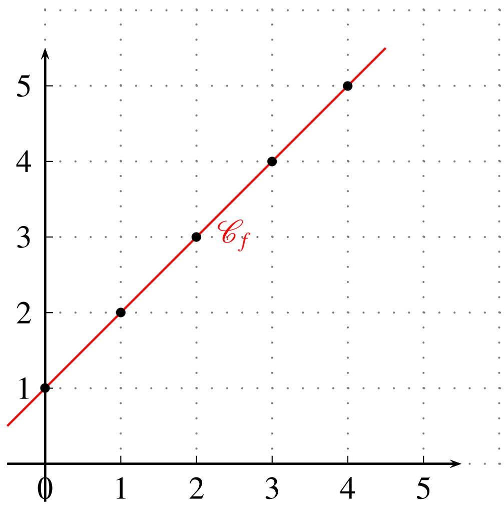
On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
La représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$.

3.1 Exemple pour une suite définie de manière explicite

Soit (u_n) la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n + 1$.

On trouve facilement $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$, etc.

Sa représentation graphique est donc l'ensemble des points de coordonnées $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, etc.

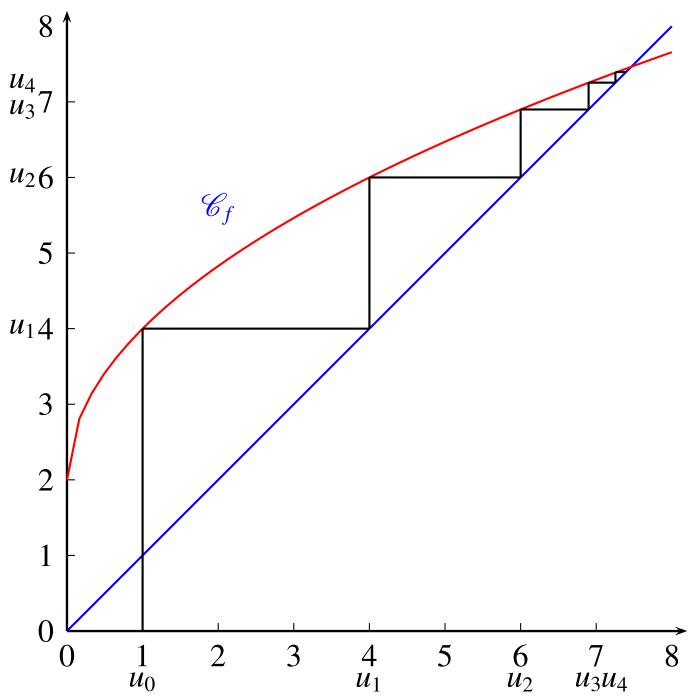


3.2 Exemple pour une suite définie par récurrence

Dans le cas d'une suite récurrente, on a l'habitude de représenter les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction définissant la relation de récurrence. On obtient alors un diagramme "en escalier" ou en "en escargot".

Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 0$ par $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$ et $u_0 = 1$.
On considère la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x} + 2$.
On a représenté ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f et la première bissectrice d'équation $y = x$, puis on a suivi les étapes suivantes :
1. On place u_0 sur l'axe des abscisses et u_1 image de u_0 par f
2. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses, à l'aide de la première bissectrice (par symétrie axiale).
3. On place u_2 image de u_1 par f, puis on reporte u_2 sur l'axe des abscisses, etc.



4 Sens de variation d'une suite

Définition

Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.
-On dit que (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$
-On dit que (u_n) est décroissante $\mathbb{N}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$
-On dit que (u_n) est monotone $\mathbb{N}$ lorsqu'elle est croissante ou décroissante $\mathbb{N}$.
-On dit que (u_n) est constante sur $\mathbb{N}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$

Remarques : on peut définir de la même façon une suite strictement croissante (etc.) par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$; on peut définir de la même façon une suite strictement croissante (etc.) à partir d'un certain rang k par : $\forall n \in \mathbb{N}, n > k$, $u_n < u_{n+1}$.

Propriété 1

-Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

-Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 4n + 2$.
On a donc $u_{n+1} = 4(n+1) + 2 = 4n + 4 + 2 = 4n + 6$, et $u_{n+1} - u_n = 4n + 6 - (4n + 2) = 4n + 6 - 4n - 2 = 4$.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Propriété 2

-Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
-Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Remarque : on a **absolument** besoin de $u_n > 0$ afin de pouvoir appliquer la Propriété n°2.

Exemple

Soit (z_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $z_n = 2 \times 5^n$.
Il est assez facile de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n > 0$.
De plus $z_{n+1} = 2 \times 5^{n+1}$, et $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = \dfrac{2 \times 5^{n+1}}{2 \times 5^n} = 5 > 1$.
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} > 1$. La suite (z_n) est donc strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Propriété 3

Soit f la fonction telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

-Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

-Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 4n$, et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x$.
On a bien $u_n = f(n)$, et en étudiant le sens de variation de f, on montre que f est croissante sur $[0; +\infty[$. La suite (u_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.

Remarques :
-Ces trois propriétés sont donc très pratiques pour déterminer le sens de variation d'une suite.
-La Propriété n°3 n'est utilisable que dans le cas où la fonction f est monotone (c'est à dire croissante ou décroissante).
-Lorsque l'on a une suite définie par une relation de récurrence, du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on ne peut pas en déduire le sens de variation de u_n à partir de celui de f. Nous verrons à l'avenir comment faire dans ce cas là.