Fonctions

1 Domaine de définition et étendue

1.1 Définitions

Définition — **Ensemble de définition**

- Définir une fonction f de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque nombre x de $\mathcal{D}$ un réel unique noté $f(x)$
- On dit que $\mathcal{D}$ est l'**ensemble de définition de** f

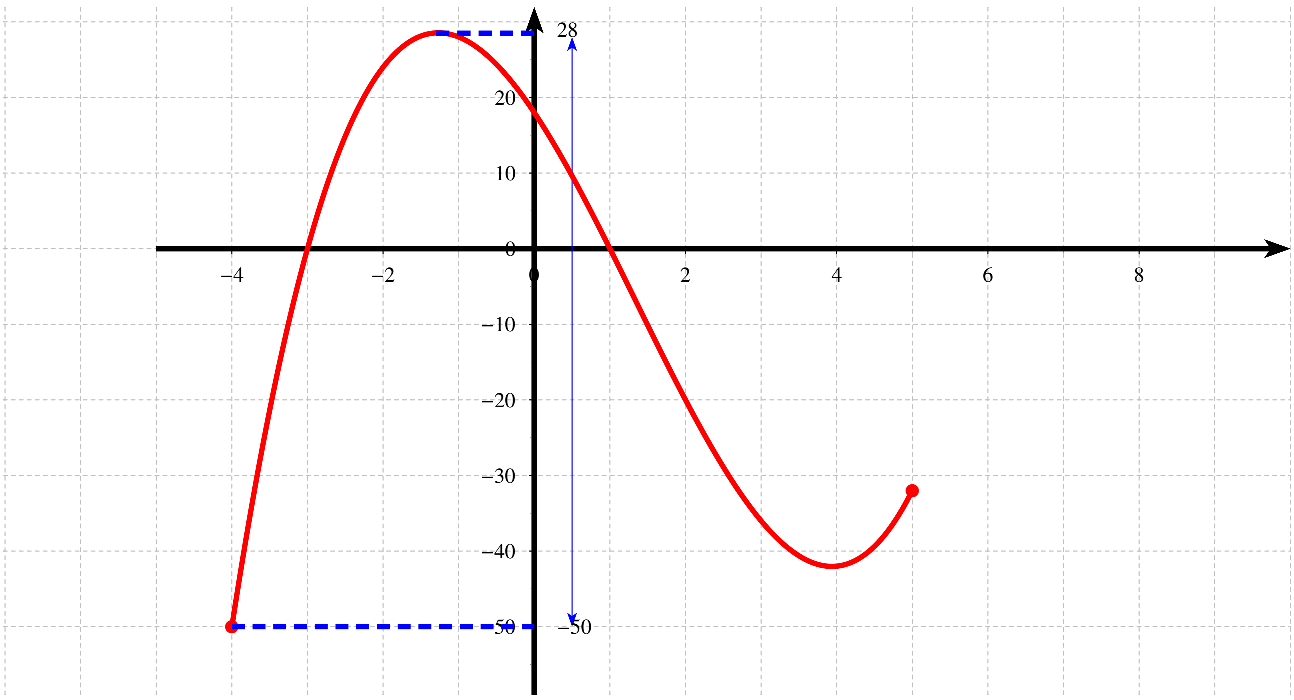
Définition — **Étendue**

L'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ quand x parcourt $\mathcal{D}$ est appelé **l'étendue** de f (ou encore image de f).

Exemple — La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$ et son étendue est $[0; +\infty[$

1.2 Graphiquement

La fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous est définie sur $D_f = [-4; 5]$ et son étendue est $[-50; 28]$.



2 Variations et extrémums

2.1 Définitions

Soit f une fonction et I un intervalle contenu dans $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition.

Définition

Variations

- Dire que f est strictement **croissante** sur I signifie que pour tout nombre u et v de I, si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$
- Dire que f est strictement **décroissante** sur I signifie que pour tout nombre u et v de I, si $u < v$ alors $f(u) > f(v)$

Remarque : f est croissante ou décroissante « au sens large » lorsqu'on autorise les inégalités larges ($\leq$ ou $\geq$).

Définition

Extrémums

Soit $a \in I$

- Dire que $f(a)$ est le **maximum** de f sur I signifie que $f(a)$ est la plus grande valeur de f : pour tout $x \in I$ $f(x) \leq f(a)$
- Dire que $f(a)$ est le **minimum** de f sur I signifie que $f(a)$ est la plus petite valeur de f : pour tout $x \in I$ $f(x) \geq f(a)$

2.2 Graphiquement

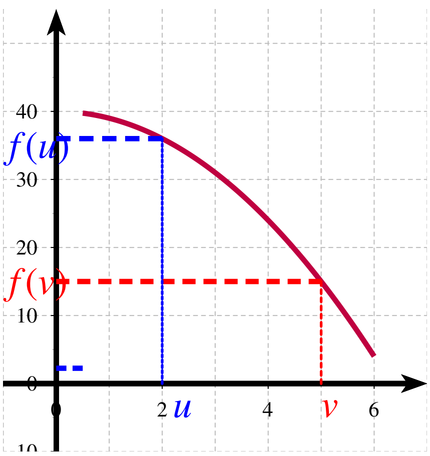
Théorème

Représentation graphique

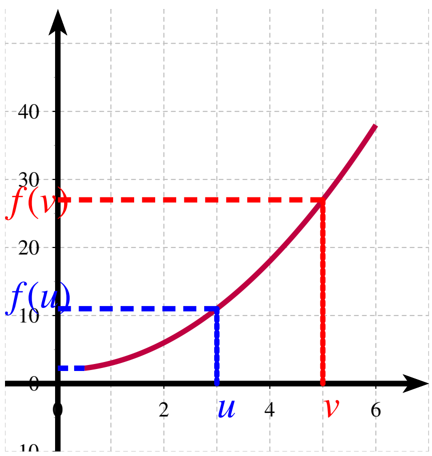
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f :

- f est croissante, ssi la courbe $\mathscr{C}_f$ « monte » de la gauche vers la droite
- Lorsque f est décroissante, ssi la courbe $\mathscr{C}_f$ « descend » de la gauche vers la droite

Exemple :



La courbe « descend ».
f est décroissante.



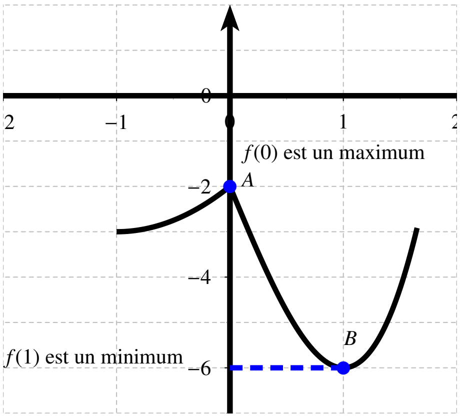
La courbe « monte ».
f est croissante.

Théorème

Extrémums

Graphiquement :

- On trouve un minimum en cherchant le point le plus bas de la courbe.
- On trouve le maximum en cherchant le point le plus haut de la courbe.



x	-1		0		1		1.5
f	-3	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-3

- La lecture du tableau nous montre que -2 est la plus grande valeur de f, on dit que -2 est le maximum de f sur $[-1; 1,5]$ et il est atteint en $x = 0$. Le point $A(0; -2)$ est le plus haut de la courbe
- La lecture du tableau nous montre que -6 est la plus petite valeur de f, on dit que -6 est le minimum de f sur $[-1; 1,5]$ et il est atteint en $x = 1$. Le point $B(1; -6)$ est le plus bas de la courbe

3 Signe d'une fonction

3.1 Définition

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et soit I un intervalle contenu dans D_f.

Définition

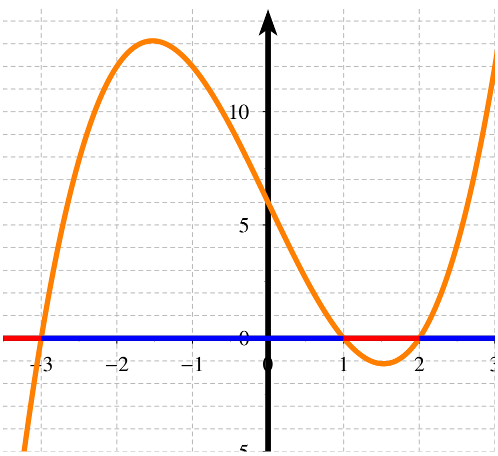
Une fonction f est dite :
- **positive** sur I si pour tout $x \in I$ $f(x) \geq 0$
- **négative** sur I si pour tout $x \in I$ $f(x) \leq 0$

3.2 Graphiquement

Théorème

Représentation graphique

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f :
- f est positive si et seulement si $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de l'axe (Ox)
- f est négative si et seulement si $\mathscr{C}_f$ se situe en dessous de l'axe (Ox)



On constate que :

$f(x) \geq 0$ sur $[-3; 1]$ et sur $[2; 3]$.
$f(x) \leq 0$ sur $[-4; -3]$ et sur $[1; 2]$.

4 La fonction carré

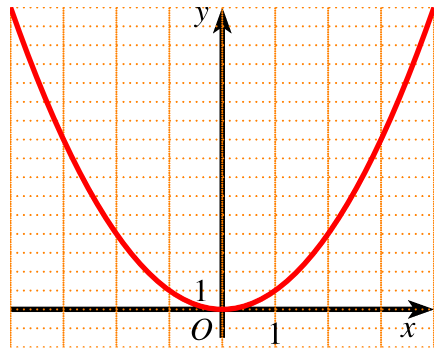
• La fonction **carrée** est définie de la façon suivante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$

• Tableau de variations :

x	
Variations de $x \longmapsto x^2$	

• Courbe représentative :



x et y sont des nombres réels.

$\boxed{\text{SI}}$ $x \in [0; +\infty[$, $y \in [0; +\infty[$ et $x \leqslant y$ $\boxed{\text{ALORS}}$ $x^2 \ldots\ldots y^2$

Écrire une version de la propriété en utilisant le sens de variation de la fonction carré sur un intervalle.

$\boxed{\text{SI}}$ $x \in]-\infty; 0]$, $y \in]-\infty; 0]$ et $x \leqslant y$ $\boxed{\text{ALORS}}$ $x^2 \ldots\ldots y^2$

Écrire une version de la propriété en utilisant le sens de variation de la fonction carré sur un intervalle.

5 La fonction racine carrée

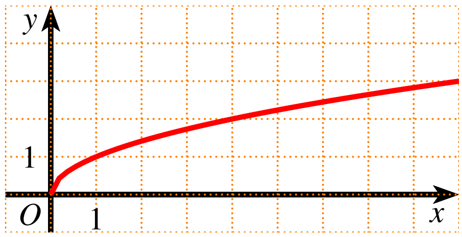
• La fonction **racine carrée** est définie de la façon suivante

$$f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

• Tableau de variations :

x	
Variations de $x \longmapsto \sqrt{x}$	

• Courbe représentative :



x et y sont des nombres réels.

$\boxed{\text{SI}}$ $x \in [0; +\infty[$, $y \in [0; +\infty[$ et $x \leqslant y$ $\boxed{\text{ALORS}}$ $\sqrt{x} \ldots\ldots \sqrt{y}$

Écrire une version de la propriété en utilisant le sens de variation de la fonction racine carrée sur un intervalle.

6 La fonction inverse

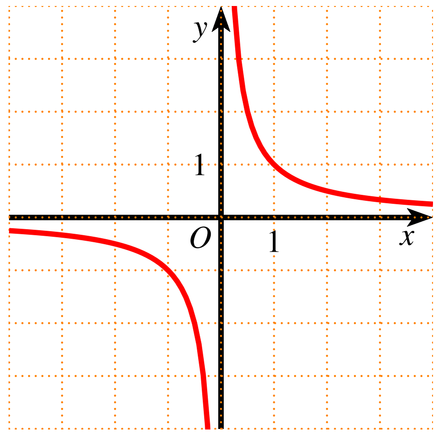
• La fonction **inverse** est définie de la façon suivante

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

• Tableau de variations :

x	
Variations de $x \longmapsto \frac{1}{x}$	

• Courbe représentative :



x et y sont des nombres réels.

$\boxed{\text{SI}}$ $x \in]0;+\infty[$, $y \in]0;+\infty[$ et $x \leqslant y$ $\boxed{\text{ALORS}}$ $\frac{1}{x} \ldots\ldots \frac{1}{y}$

Écrire une version de la propriété en utilisant le sens de variation de la fonction inverse sur un intervalle.

$\boxed{\text{SI}}$ $x \in]-\infty;0[$, $y \in]-\infty;0[$ et $x \leqslant y$ $\boxed{\text{ALORS}}$ $\frac{1}{x} \ldots\ldots \frac{1}{y}$

Écrire une version de la propriété en utilisant le sens de variation de la fonction inverse sur un intervalle.

• ○ •

7 La fonction valeur absolue

• La fonction **valeur absolue** est définie de la façon suivante

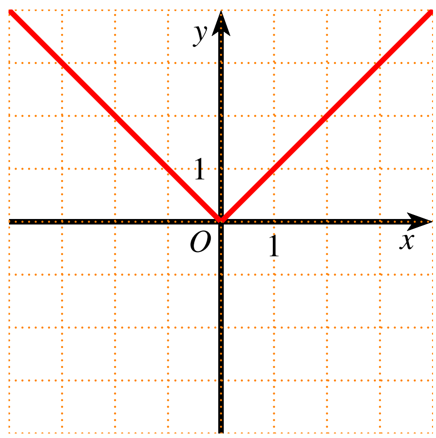
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

• Tableau de variations :

x	
Variations de $x \longmapsto |x|$	

• Courbe représentative :



x et y sont des nombres réels.

$\boxed{\text{SI}}$ $x \in]0;+\infty[$, $y \in]0;+\infty[$ et $x \leqslant y$ $\boxed{\text{ALORS}}$ $\lvert x\rvert \ldots\ldots \lvert y\rvert$	*Écrire une version de la propriété en utilisant le sens de variation de la fonction valeur absolue sur un intervalle.*
$\boxed{\text{SI}}$ $x \in]-\infty;0[$, $y \in]-\infty;0[$ et $x \leqslant y$ $\boxed{\text{ALORS}}$ $\lvert x\rvert \ldots\ldots \lvert y\rvert$	*Écrire une version de la propriété en utilisant le sens de variation de la fonction valeur absolue sur un intervalle.*

• ○ •

8 Fonction polynôme du second degré

Définition

Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, et c sont des nombres réels donnés avec $a \neq 0$.
L'expression $ax^2 + bx + c$ est encore appelée **trinôme du second degré**.

Exercice

La fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto -4.9t^2 + 9.8t + 1.5$ est une fonction polynôme de degré deux.

La fonction $g : x \longmapsto 0.5x^2 - 3$ est également une fonction polynôme de degré deux.

Qu'en est-il de $s : x \longmapsto -3(6x - 2x^3) + x^2 - 6x^3 + 1$? et de $v : x \longmapsto 2x^2\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right) + 2$?

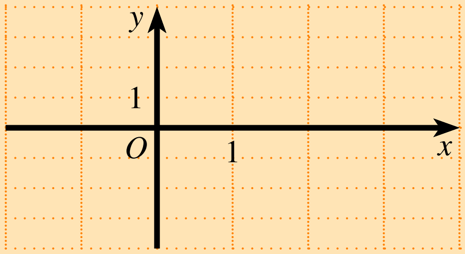
8.1 Représentation graphique

Définition, propriétés

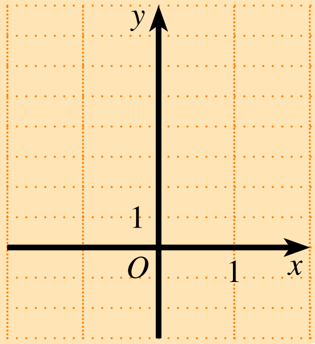
La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 f est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}; f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.
De plus :
-Si $a > 0$, la parabole C_f est « tournée vers le haut ». (le sommet S de la courbe correspond au point le plus « bas », l'ordonnée de S correspond au minimum de f atteint en $-\dfrac{b}{2a}$)
-Si $a < 0$, la parabole C_f est « tournée vers le bas ». (le sommet S de la courbe correspond au point le plus « haut », l'ordonnée de S correspond au maximum de f atteint en $-\dfrac{b}{2a}$)

Exercice

$f : x \longmapsto -x^2 + 3x + 1$



$g : x \longmapsto 2x^2 - x - 2$



8.2 Forme canonique d'un trinôme

Propriété

Pour toute fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on peut trouver deux nombres réels α et β tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Cette écriture de $f(x)$ s'appelle la **forme canonique** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$.

Trouver la forme canonique de la fonction f.

9 Variations d'une fonction polynôme de degré 2

Propriétés

Soit f une fonction polynôme de degré deux définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

— Si $a > 0$, f est **décroissante** sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ et **croissante** sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$.

— Si $a < 0$, f est **croissante** sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ et **décroissante** sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$.

$\boxed{a > 0}$

Tableau de variations de f :

$(a > 0)$ x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de $x \mapsto ax^2 + bx + c$	↘	$f(-\frac{b}{2a})$	↗

$\boxed{a < 0}$

Tableau de variations de f :

$(a < 0)$ x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de $x \mapsto ax^2 + bx + c$	↗	$f(-\frac{b}{2a})$	↘

Exercice

Dresser les tableaux de variations des deux fonctions polynômes de degré 2 suivantes :
$h(x) = 4x - 3x^2 + 1$ et $k(x) = \frac{2}{3}x^2 + x + \frac{4}{3}$
Donner les valeurs des extrémums de h et de k.

Remarque La connaissance de la forme canonique permet de donner le maximum ou le minimum de f (suivant le signe de a).
Si $f(x) = 3x^2 - 24x + 4$, f admet-elle un minimum ou un maximum ? En quelle valeur et combien vaut-il ?

10 Équations du second degré et factorisation du polynôme

10.1 Équation du second degré

Définition Une **équation du second degré**, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels donnés, avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation est appelée **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

10.2 Résolution

Définition, notation Le nombre réel $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
On le note Δ.

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ avec ($a \neq 0$) revient à résoudre l'équation : $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$ qui s'écrit encore :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Dans cette expression, les quantités $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et $4a^2$ sont positives sauf peut-être Δ, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème D'après ce qui précède, il résulte que si :
-$\boldsymbol{\Delta < 0}$, l'équation n'a **pas de solution réelle**.
-$\boldsymbol{\Delta = 0}$, l'équation a **une seule solution** $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$.
-$\boldsymbol{\Delta > 0}$, l'équation a **deux solutions** :
$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$

Propriété Soient x_1 et x_2 les racines d'un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ ($\Delta \geq 0$), où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

$$\text{on a } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

10.3 Factorisation du trinôme

La factorisation d'un trinôme du second degré n'est pas toujours possible. Elle dépend de la valeur de Δ. Plus précisément, si :

Théorème :

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$, aucune factorisation n'est possible.
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$, $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2}$ ou x_0 est la seule racine du trinôme.
- $\boldsymbol{\Delta > 0}$, $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.

Exercice : Factoriser, si cela est possible, $-4x^2 - 12x + 16$.

11 Signe du trinôme

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et par C_f sa courbe représentative.

11.1 Traduction graphique de $ax^2 + bx + c = 0$

Propriété : Les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$, si elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

11.2 $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$

Propriété : Les solutions de l'inéquation du second degré $ax^2 + bx + c > 0$ (*resp.* $ax^2 + bx + c < 0$), si elles existent, sont les abscisses des points de C_f situés au-dessus (*resp. au-dessous*) de l'axe des abscisses.

11.3 Tableaux de signes d'un trinôme

Ce qui précède trouve également une explication dans l'utilisation de la forme factorisée de $ax^2 + bx + c$ si elle existe (on a vu que son existence dépend ...

En effet,

- Si $\Delta > 0$: soient x_1 et x_2 ses racines, avec (pour fixer les idées) $x_1 < x_2$.
  On obtient la factorisation suivante : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$			0				
$x - x_2$					0		
Signe de $(x - x_1)(x - x_2)$			0		0		
Signe de $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$			0		0		

- Si $\Delta < 0$: on utilise la forme canonique : $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$
  Comme Δ est négatif, l'expression entre crochets est strictement positive, le signe de $f(x)$ est donc le

même que celui de a.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	

— Qu'en est-il pour $\Delta = 0$?

11.4 Exemples de recherche de signes

Exercices

Déterminer le signe de $-6x^2 + 26x - 8$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $5x^2 + 5\sqrt{2}x - 20 \leqslant 0$

12 Fonctions cosinus et sinus

12.1 Définitions

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit deux fonctions :

$$\begin{aligned} \texttt{cos} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$$

• De $\cos(-x) = \cos(x)$, il résulte que deux nombres `opposés` ont la même image. La fonction cosinus est donc une fonction **paire**.

D'un point de vue graphique, la courbe représentative de la fonction cosinus $\mathscr{C}_{\cos}$ est `symétrique` par rapport à l'axe des `ordonnées`.

•○•

• De $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, il résulte que deux nombres « distants » d'un multiple de 2π ont la même image.

$$\begin{aligned} \texttt{sin} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned}$$

• De $\sin(-x) = -\sin(x)$, il résulte que deux nombres `opposés` ont des images opposées. La fonction sinus est donc une fonction **impaire**.

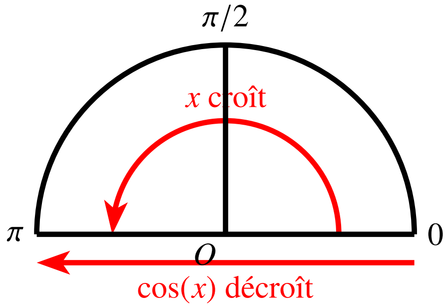
D'un point de vue graphique, la courbe représentative de la fonction sinus $\mathscr{C}_{\sin}$ est `symétrique` par rapport à l'origine O du repère.

•○•

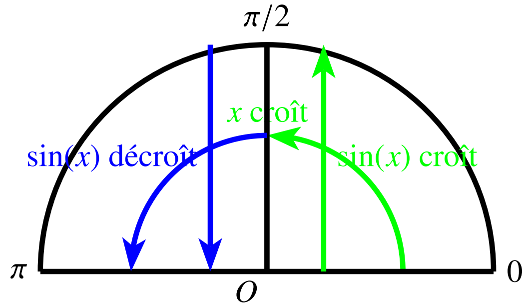
• De $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$, il résulte que deux nombres « distants » d'un multiple de 2π ont la même image.

D'un point de vue graphique, les courbes représentatives des fonctions cosinus $\mathscr{C}_{\cos}$ et sinus $\mathscr{C}_{\sin}$ sont composées d'un « motif » qui se répète : on dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π.

12.2 Variations des fonctions cosinus et sinus

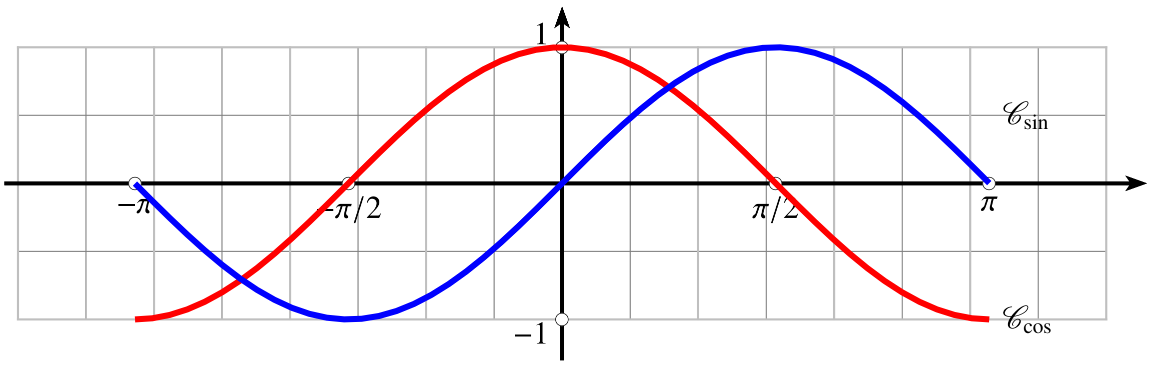


x	0	π
Variations de cos	1 ↘	-1



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations de sin	0 ↗	1	↘ 0

12.3 Courbes



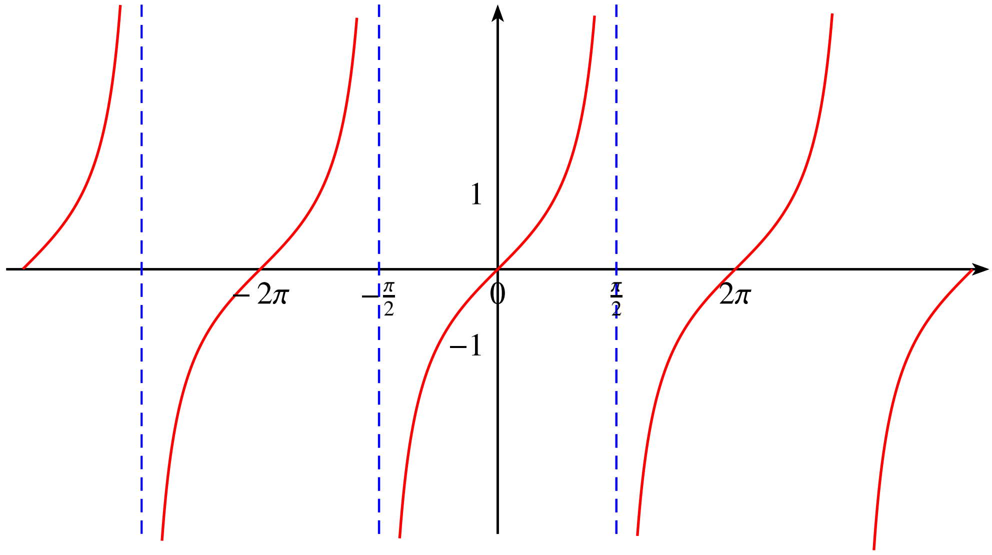
Courbes $\mathscr{C}_{\cos}$ et $\mathscr{C}_{\sin}$

13 Fonction tangente

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la fonction tangente (notée $\mathtt{tan}$) par :

$$\begin{aligned} \mathtt{tan} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathtt{tan}(x) = \frac{\mathtt{sin}(x)}{\mathtt{cos}(x)} \end{aligned}$$

Courbe de $y = \tan(x)$



• De $\tan(-x) = -\tan(x)$, il résulte que deux nombres **opposés** ont des images **opposées**. La fonction tangente est donc une fonction **impaire**.

• D'un point de vue graphique, la courbe représentative de $\mathscr{C}_{\tan}$est composée d'un « motif » qui se répète : la fonction tan est **périodiques** de période π.

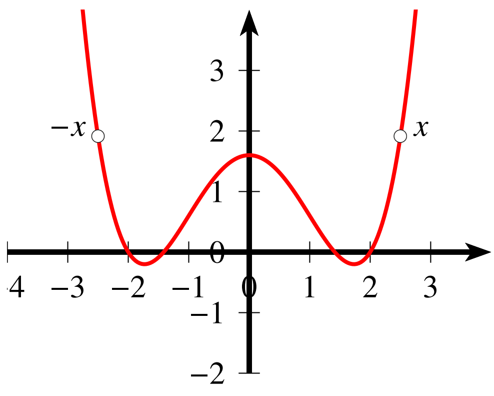
14 Fonction paire et fonction impaire

14.1 Fonction paire

Définition On dit qu'une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est **paire** si :

$\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$ **et** $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

Propriété Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Exemple Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = 5x^2 + 3$ est paire.

Correction : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et

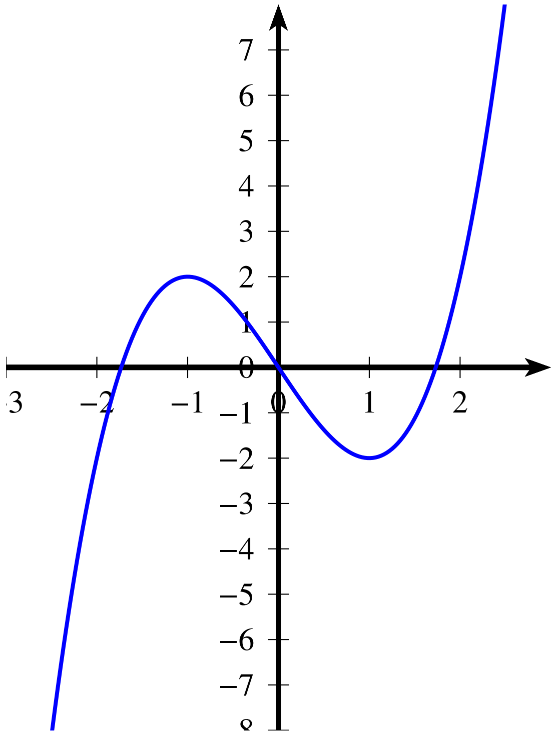
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3.$$

Donc $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$. De plus $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à O, la fonction f est donc **paire**. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

14.2 Fonction impaire

Définition On dit qu'une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ est **impaire** si :
$\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$ **et** $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère O.

Propriété La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Exemple Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x$ est impaire.

Correction : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x.$$

Et

$$-f(x) = -(x^3 - 3x) = -x^3 + 3x.$$

Donc $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$. De plus, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à O, donc la fonction f est donc **impaire**. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

15 Fonctions périodiques

15.1 Définition

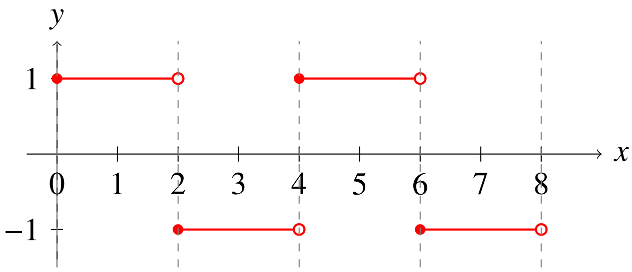
Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. On dit que f est **périodique** de période $T > 0$ si :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x + T \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Remarque : Si une fonction est périodique de période T, alors elle est aussi périodique de période kT pour tout entier $k \geq 1$. On s'intéresse en général à la plus petite période positive, appelée la **période fondamentale**.

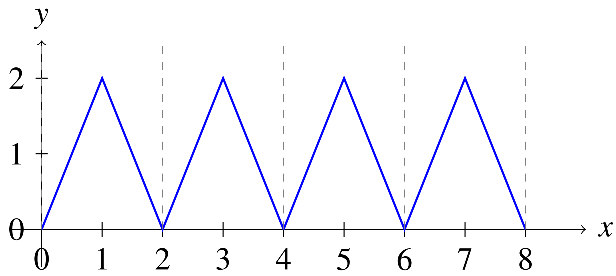
Propriété La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction périodique f de période T est **invariante par translation** de vecteur $\vec{u} = (T;0)$. Autrement dit, si l'on connaît la courbe de f sur un intervalle de longueur T, on peut la reconstituer sur tout $\mathbb{R}$ en répétant ce « motif ».

Fonction créneau périodique (période 4)



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,2[+4k, \\ -1 & \text{si } x \in [2,4[+4k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

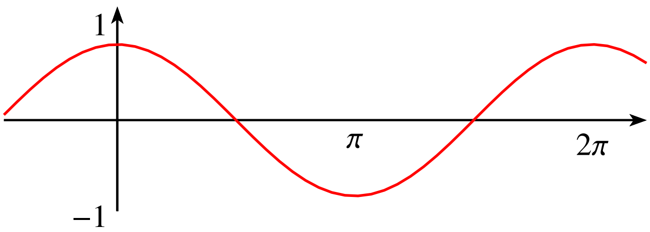
Fonction triangulaire périodique (période 2)



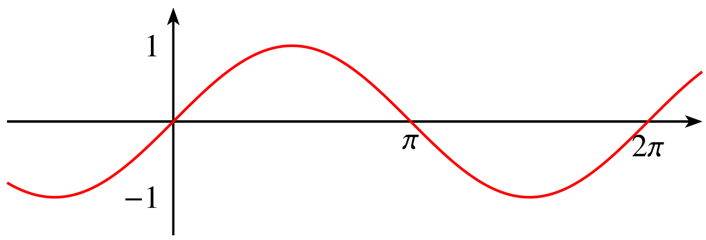
Exemples

— La fonction **cosinus**, $f(x) = \cos(x)$, est périodique de période 2π.
— La fonction **sinus**, $f(x) = \sin(x)$, est périodique de période 2π.
— La fonction **tangente**, $f(x) = \tan(x)$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, est périodique de période π.

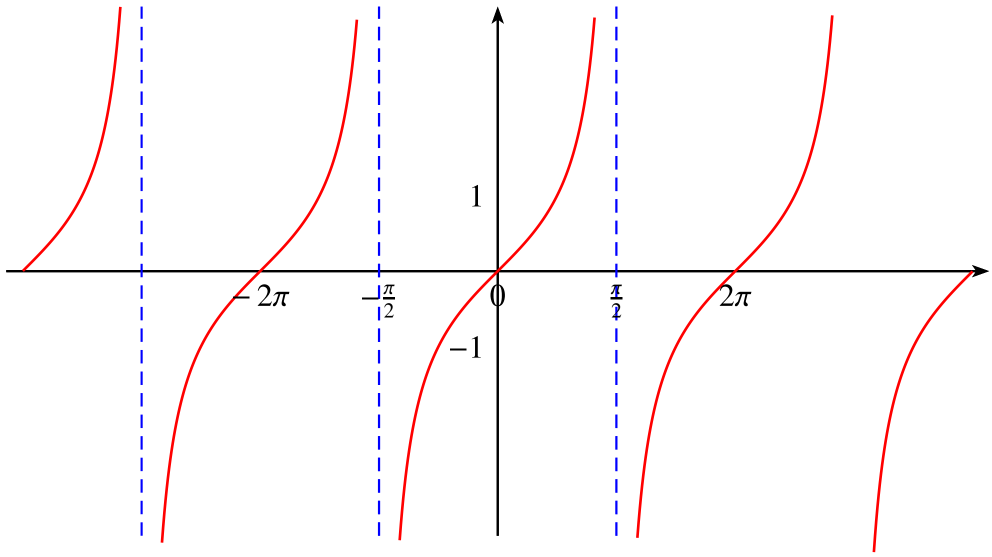
Courbe de $y = \cos(x)$



Courbe de $y = \sin(x)$



Courbe de $y = \tan(x)$



Exercice Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ est périodique et préciser sa période.

16 Fonctions associées

Propriétés

On considère dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ les représentations graphiques de fonctions f, g, h, k, l, m, n.
Soient α, β, γ, δ, a des réels.

- $g(x) = f(x) + \alpha \implies C_g$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $\alpha\vec{j}$.
- $h(x) = f(x - \beta) \implies C_h$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $\beta\vec{i}$.
- $k(x) = f(x - \delta) + \gamma \implies C_k$ est l'image de C_f par la translation de vecteur $\vec{u} = \delta\vec{i} + \gamma\vec{j}$.
- $l(x) = a\,f(x) \implies C_l$ s'obtient en multipliant les ordonnées des points de C_f par a.
- $m(x) = -f(x) \implies C_m$ est le symétrique de C_f par rapport à $(O\,;\vec{i})$.
- $n(x) = |f(x)| \implies C_n$ s'obtient en conservant la partie de C_f située au-dessus de $(O\,;\vec{i})$ et en prenant le symétrique par rapport à $(O\,;\vec{i})$ de la partie située en dessous de $(O\,;\vec{i})$.

17 Opérations sur les fonctions

17.1 Somme et produit de fonctions

Définition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur des ensembles $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ de $\mathbb{R}$.

- On définit la **somme** $f + g$ par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g.$$

- On définit le **produit** $f \cdot g$ par :

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g.$$

Exemple

- $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$, et $g(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0, +\infty[$.
  Alors $f + g$ est définie sur $[0, +\infty[$ et $(f + g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$.
- $f \cdot g$ est définie aussi sur $[0, +\infty[$ et $(f \cdot g)(x) = x^2\sqrt{x} = x^{\frac{5}{2}}$.

17.2 Quotient de fonctions

Définition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Le **quotient** $\dfrac{f}{g}$ est défini par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \text{ tel que } g(x) \neq 0.$$

Exemple 1

— Soit $f(x) = x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
— $g(x) = x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
— Alors $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1.$$

Exemple 2

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$ et $g(x) = x^2 - 6x + 8$ définie sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.
Comment est définie la fonction $\dfrac{f}{g}$?
On commence par regarder si le dénominateur peut s'annuler, en résolvant $g(x) = 0$.

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = 4.$$

Ainsi, g admet 2 et 4 comme racines.

Le quotient $\dfrac{f}{g}$ sera donc défini sur

$$\mathbb{R}^+ \cap (\mathbb{R} \setminus \{2;4\}) = \mathbb{R}^+ \setminus \{2;4\} = [0;2[\cup]2;4[\cup]4;+\infty[.$$

Et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{2;4\}$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-6x+8} = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-2)(x-4)}$.

18 Composition de fonctions

Définition

Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que l'image de g est incluse dans $\mathcal{D}_f$.
On définit la **composée** $f \circ g$ par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}_g \text{ tel que } g(x) \in \mathcal{D}_f.$$

Exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0, +\infty[$, et la fonction $g(x) = x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$, et son image est incluse dans $[1; +\infty[$. On a donc $\forall x \in \mathcal{D}_g$, $g(x) \in \mathcal{D}_f$.
Alors $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
En revanche $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$ est définie seulement sur $[0, +\infty[$.

Propriété

La composée de deux fonctions de même monotonie est une fonction croissante.
La composée de deux fonctions de monotonie contraire est une fonction décroissante.

Exemples

Exemple 1 (même monotonie) :
Soit $f(x) = 2x + 1$, croissante sur $\mathbb{R}$, et $g(x) = 3x - 5$, croissante sur $\mathbb{R}$. Alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(3x-5) + 1 = 6x - 9,$$

qui est bien une fonction croissante.

Exemple 2 (monotonies contraires) :
Soit $f(x) = -x$, décroissante sur $\mathbb{R}$, et $g(x) = x^2$, croissante sur $[0, +\infty[$. Alors

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -x^2, \quad x \geq 0,$$

qui est bien une fonction décroissante sur $[0, +\infty[$.

19 Fonction réciproque

19.1 Définition

Définition

Soient f et g deux fonctions (définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$) telles que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_g, f \circ g(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, g \circ f(x) = x$$

Alors on dit que f et g sont **réciproques l'une de l'autre**.

Notation

Si g et f sont des fonctions réciproques l'une de l'autre, on note alors $g = f^{-1}$.
Autrement dit on a : $f \circ f^{-1}(x) = x$ et $f^{-1} \circ f(x) = x$.

19.2 Lien avec la représentation graphique

Graphiquement, deux fonctions réciproques ont des courbes **symétriques par rapport à la droite** $y = x$.
Ainsi, si un point $M(x, y)$ appartient à la courbe de f, alors le point $M'(y, x)$ appartient à la courbe de sa réciproque g.
C'est ce qu'on observe sur les exemples ci-dessus :

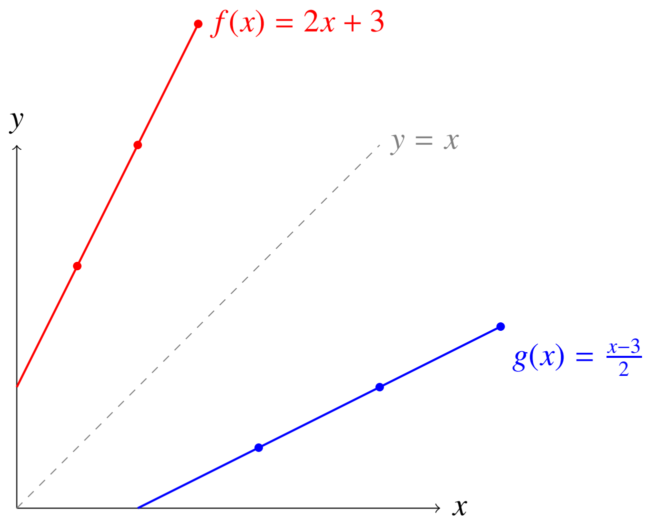
- la droite $f(x) = 2x + 3$ et sa réciproque $g(x) = \dfrac{x-3}{2}$,
- la parabole $f(x) = x^2$ (sur $[0, +\infty[$) et sa réciproque $g(x) = \sqrt{x}$.

Exemple 1

On considère $f(x) = 2x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.
On définit $g(x) = \dfrac{x-3}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
On vérifie :

$$f(g(x)) = 2 \cdot \frac{x-3}{2} + 3 = x, \qquad g(f(x)) = \frac{2x+3-3}{2} = x.$$

Ainsi f et g sont réciproques l'une de l'autre.

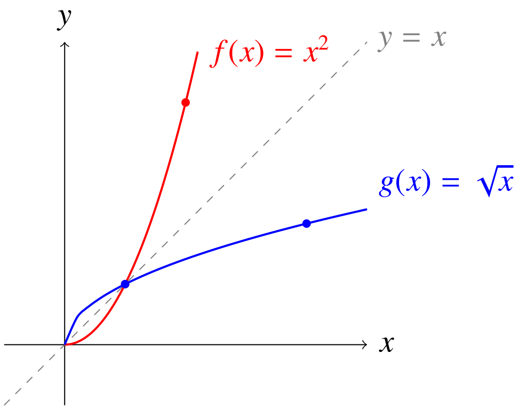


Exemple 2

Soit $f(x) = x^2$ définie sur $[0, +\infty[$.
On définit $g(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
Alors :

$$f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x, \qquad g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x \quad (\text{car } x \geq 0).$$

Ainsi f et g sont réciproques.



Exercice

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{3x+4}{x+2}.$$

g^{-1} est la fonction réciproque de g.
Déterminer a de telle sorte que $g^{-1}(a) = -3$.

Correction :
Par définition de la fonction réciproque :

$$g(-3) = a.$$

Or,

$$g(-3) = \frac{3\times(-3)+4}{-3+2} = \frac{-9+4}{-1} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

Ainsi :

$$a = 5.$$

Remarque : On peut aussi chercher d'abord la fonction réciproque g^{-1}, c'est un peu plus long ici.

Soit $y = g(x) = \dfrac{3x+4}{x+2}$. On exprime x en fonction de y :

$$y(x+2) = 3x+4 \iff yx + 2y = 3x + 4.$$

$$yx - 3x = 4 - 2y \iff x(y-3) = 4 - 2y.$$

$$x = \frac{4-2y}{y-3}.$$

Ainsi, la fonction réciproque est :

$$g^{-1}(y) = \frac{4-2y}{y-3}.$$

On sait que $g^{-1}(a) = -3$, donc on a :

$$-3 = \frac{4-2a}{a-3}.$$

$$-3(a-3) = 4 - 2a \iff -3a + 9 = 4 - 2a.$$

$$-3a + 2a = 4 - 9 \iff -a = -5.$$

$$a = 5.$$