Le produit scalaire

1 Compléments sur les vecteurs

1.1 Norme d'un vecteur

Définition : Soit deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ d'un même vecteur $\overrightarrow{u}$. Les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont la même longueur qui est appelé **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$, noté $\|\overrightarrow{u}\|$.

Propriété 1 :

1. La norme $\|\overrightarrow{u}\|$ est un réel positif ou nul et on a $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
2. Soit $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(x; y)$ dans un repère orthonormé. Alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $\|k\overrightarrow{u}\| = \mid k \mid \times \|\overrightarrow{u}\|$.
4. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$.

Définition : Un vecteur est dit **unitaire** si sa norme est égale à un.

Remarque : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul. Alors $\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ est un vecteur unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

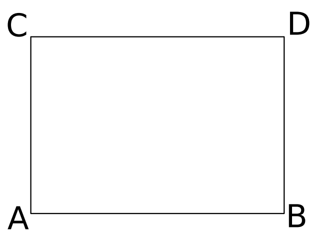
1.2 Angles géométriques et angles orientés

Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Les mesures en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ sont les mesures en radians de l'angle orienté $\widehat{AOB}$.

Remarque importante : nous distinguerons angle **géométrique** et angle **orienté** : un angle **géométrique** est toujours **positif**. Ce n'est pas le cas d'un angle **orienté** qui peut être **négatif**, et dont le sens dépend de l'orientation choisie.
On notera : $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ pour un angle orienté, et $(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}})$ pour un angle géométrique.

Exemple : Si l'orientation choisie est le sens trigonométrique, on a :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2} = (\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}})$$
$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{-\pi}{2}$$



Définition : Si les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

1.3 Projection orthogonale d'un vecteur

Définition : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, (d) une droite de direction $\overrightarrow{u}$. Soit un vecteur v dont $\overrightarrow{AB}$ est un représentant, et soient A' et B' les projections orthogonales de A et B sur (d).
La projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{v}$ sur la droite (d) est le vecteur dont un représentant est le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

Remarque : $\overrightarrow{AB}$ est indépendant du représentant choisi, et également indépendant de (d).

2 Expression du produit scalaire

2.1 Définition du produit scalaire de deux vecteurs

Définition : Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le nombre réel défini par :

1. $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls
2. $\vec{u}.\vec{v} = 0$ lorsque $\vec{u} = 0$ ou lorsque $\vec{v} = 0$.

Remarques :

1. On a immédiatement $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
2. Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, noté $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ est le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des représentants des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
3. On notera indifférement $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$

Propriété : Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si et seulement si ($\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = 0$ ou $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux)
3. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, l'angle $\widehat{\vec{u}.\vec{v}}$ est aigu si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} > 0$
4. Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, l'angle $\widehat{\vec{u}.\vec{v}}$ est obtus si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} < 0$

2.2 Autres expressions du produit scalaire

Propriété :

1. **Projection orthogonale** : si $\vec{u}$ est non nul, $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{v_1}$ où $\vec{v_1}$ est la projection orthogonale de v sur une droite de direction $\vec{u}$.
2. **Carré scalaire** : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
3. **Expression analytique** : dans un repère orthonormé, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple : Soit $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(1; 4)$. Alors $\vec{u}.\vec{v} = 2 \times 1 + (-3) \times 4 = -10$

3 Propriétés et applications du produit scalaire

3.1 Calculer avec le produit scalaire

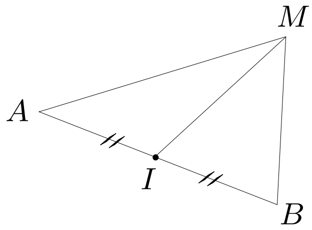
Propriété : Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et pour tout réel k, on a :

1. $(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$
2. $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
3. $(\vec{u} + \vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
4. $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
5. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)=\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
6. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

Remarque : Ces propriétés sont facilement démontrables par l'expression analytique du produit scalaire.

3.2 Théorème de la médiane

Propriété : Si MAB est un triangle et I le milieu de $[AB]$ alors $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.



<u>démonstration</u> :

3.3 Vecteurs orthogonaux, vecteur normal à une droite

Propriété : Dans un repère orthonormé, les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$. Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux si et seulement si } xx' + yy' = 0$$

<u>Définition</u> : Soit D une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. On dit que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur **normal** à D s'il est orthogonal à un vecteur directeur de D.

Une équation de D est	Un vecteur directeur de D est	Un vecteur normal à D est	$D' \perp D$ a pour équation
$y = cste$	$(1; 0)$	$(0; 1)$	$x = cste$
$x = cste$	$(0; 1)$	$(1; 0)$	$y = cste$
$y = mx + p$ avec $m \neq 0$	$(1; m)$	$(1; \frac{-1}{m})$	$y = \frac{-1}{m}x + k$
$ax + by + c = 0$ avec a, b non tous nuls	$(-b; a)$ ou $(b; -a)$	$(a; b)$	$bx - ay + k = 0$

<u>Exercice</u> : Ecrire une équation de la droite Δ passant par $A(-4; 6)$ et perpendiculaire à la droite D d'équation $3x - y + 2 = 0$.

3.4 Le cercle

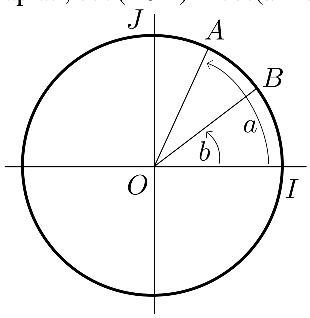
Propriété : Une équation du cercle C de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, que l'on peut encore écrire $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$ où $c = R^2 - a^2 - b^2$.

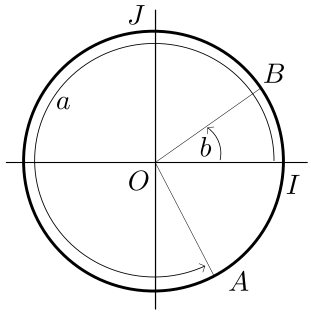
<u>démonstration</u> :

Propriété : M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

3.5 Formules de trigonométrie

Propriété : Soient a et b deux réels et A et B les points du cercle trigonométrique tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$. Alors dans ce triangle éventuellement aplati, $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(a-b)$.





Propriété : Pour tout réels a et b, on a :

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
4. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
5. $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
6. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
7. $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

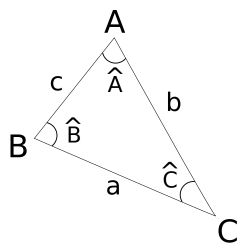
démonstrations :

Théorème d'Al Kashi (démontré en classe) :

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$



Propriété de l'aire d'un triangle (démontré en classe) : Dans un triangle ABC d'aire S, on a $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$

Formule des sinus (démontré en classe) : Dans un triangle ABC, $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$