Fonctions affines et linéaires

I) Fonctions linéaires

Définition : une fonction f est linéaire si l'image d'un nombre s'obtient en multipliant le nombre de départ par un nombre fixé, autrement dit lorsqu'il existe un nombre réel a tel que $f(x) = ax$.

Le nombre a est appelé **coefficient** de la fonction linéaire.

Propriété : Lorsqu'une fonction est linéaire, les images sont proportionnelles aux antécédents.

Exemple 1 : soit f la fonction définie par $f(x) = 3x$

valeur de x	0	1	2	4	-1
Image $f(x)$	0	3	6	12	-3

Coefficient de proportionnalité : 3

Exemple 2 : soit g la fonction définie par $g(x) = -2x$

valeur de x	0	1	2	4	-1
Image $g(x)$	0	-2	-4	-8	2

Coefficient de proportionnalité : -2

II) Représenter les fonctions linéaires

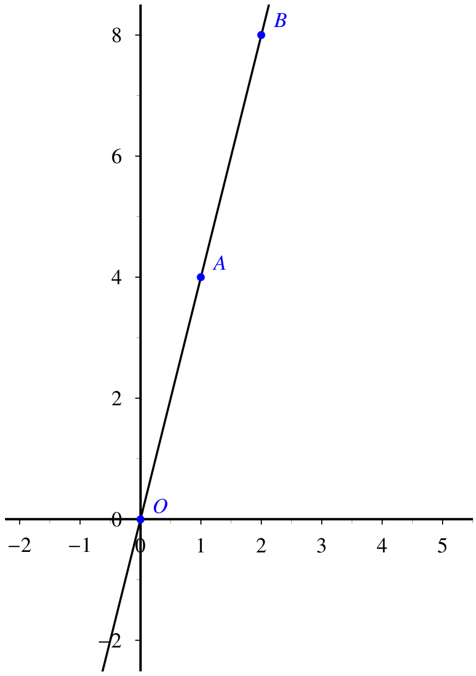
Définition : le coefficient a de la fonction linéaire f s'appelle aussi le **coefficient directeur de la droite** (d) représentant la fonction f.

Propriétés :

- Si une fonction est linéaire, alors sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.
- Si une fonction est représentée par une droite passant par l'origine, alors elle est linéaire.

Exemple 1 : soit $f(x) = 4x$. Il s'agit d'une fonction linéaire, appelons $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On peut trouver facilement des points appartenant à $\mathscr{C}_f$ afin de la tracer :
$f(0) = 4\times0 = 0$ donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point O de coordonnées $(0;0)$ (ce que l'on savait déjà, car f est une fonction linéaire).
$f(1) = 4 \times 1 = 4$ donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point A de coordonnées $(1;4)$.

$f(2) = 4 \times 2 = 8$ donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point B de coordonnées $(2; 8)$.
On peut ainsi trouver de nombreux points appartenant à $\mathscr{C}_f$, mais deux suffisent pour tracer la droite $\mathscr{C}_f$.



Exemple 2 : donner la fonction linéaire g dont la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ passe par le point $C(2; 6)$.

On sait que g est une fonction linéaire donc son équation est $g(x) = ax$ avec a un nombre réel.
De plus on a $g(2) = 6$ donc comme $g(2) = a \times 2$ on a $6 = a \times 2$, soit $a = 6 \div 2 = 3$.
L'équation de la fonction est donc $g(x) = 3x$.

III) Fonctions affines

Définition : Une fonction est dite **affine** lorsqu'il existe deux nombres réels a et b tels que $f(x) = ax + b$.
Les nombres a et b sont appelés les coefficients de la fonction affine f.
Le nombre a est appelé **coefficient directeur** de la droite représentative de la fonction f.
Le nombre b est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite représentative de la fonction f.

Remarques :
- Si $b = 0$ alors $f(x) = ax$. La fonction f est alors linéaire.
- Si $a = 0$ alors $f(x) = b$. La fonction f est alors constante.

Exercice 1 :
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 2x - 5$.

1. Calculer l'image de -2 par f.
2. Calculer un antécédent de 5 par la fonction f.

Exercice 2 : Soit f une fonction affine dont la courbe représentative passe par les points $A(-4; 6)$ et $B(2; 4)$. Trouver l'équation de la fonction f.

IV) Représenter les fonctions affines

Propriété : La représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une droite (d). On dit que a est le coefficient directeur de la droite et que b est l'ordonnée à l'origine de la droite (d).
Une droite non verticale représente une fonction affine.
Si f est une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$ alors pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, on a :

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Exemple : Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.

Il s'agit d'une fonction affine, appelons $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On peut trouver facilement des points appartenant à $\mathscr{C}_f$ afin de la tracer :
$f(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$ donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point A de coordonnées $(0; -3)$.
$f(1) = 2 \times 1 - 3 = -1$ donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point B de coordonnées $(1; -1)$.
On peut ainsi trouver de nombreux points appartenant à $\mathscr{C}_f$, mais deux suffisent pour tracer la droite $\mathscr{C}_f$.