Exposé 80 : Caractérisation des fonctions exponentielles par l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x).f(y)$. Applications.

Prérequis[1] : -$x \mapsto exp_x$, introduit comme bijection réciproque de $x \mapsto \ln$
-$exp_a x = a^x$
-$a^{x+y} = a^x a^y$
-continuité, dérivabilité, intégrale
-$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$

Motivation : pour tout réel non nul a, l'application $\varphi : n \in \mathbb{Z} \mapsto a^n$ (avec la convention $a^0 = 1$) satisfait à $\varphi_a(n+m) = \varphi_a(n).\varphi_a(m)$, pour tout entiers n et m...

Cadre : Soit E={ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x).f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ }, E^*={ $f \in E$, $f(x) \not\equiv 0$}

remarques : -Les fonctions exponentielles sont (clairement) solutions de E^*
-A t-on toujours [$f \in E \Rightarrow f(x) = e^{\alpha x}$] ? Non, et c'est bien l'intérêt de l'exposé...

1 Propriétés

Propriétes :

1. $E \neq \emptyset$ et $E^* \neq \emptyset$
2. Si $f \in E$ et si f s'annule en un point a, alors $f \equiv 0$
3. Si $f \in E^*$, alors $f > 0$
4. Si $f \in E^*$, alors $f(0) = 1$

preuve : (1) la fonction nulle est trivialement dans E, de même la fonction $x \mapsto exp(x)$ est dans E^*
(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x-a).f(a)$, donc si f s'annule en a, $f(x) \equiv 0$
(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geqslant 0$, donc si $x \neq 0$, $f(x) > 0$ (par 2)
(4) $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ donc $f(0).(1 - f(0)) = 0$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$, or $f(0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$, donc $f(0) = 1$ □

Conclusion : les éléments de E^* sont des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

Propriété de continuité : si $f \in E$ et f continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$, alors f continue sur $\mathbb{R}$.

preuve : soit $f \not\equiv 0$ (trivial sinon), $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+h) = f(x - x_0 + x_0 + h)$=$f(x - x_0).f(x_0 + h)$, or f continue en x_0, donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, d'où $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h)$=$f(x - x_0).f(x_0)$=$f(x - x_0 + x_0)$=$f(x)$. Ainsi, $\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h)$=$f(x)$, donc f continue sur $\mathbb{R}$ □

Propriété de dérivabilité : si $f \in E$ et f continue en un point x_0 (donc sur $\mathbb{R}$ par ce qui précède), alors $f \in C^{+\infty}(\mathbb{R})$, et $f'(x) = f'(0).f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

preuve : soit $f \in E$, f continue en $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow fC^0(\mathbb{R})$ par la proposition précédente. Soit $g(x) = \int_0^1 f(x+y)dy$ (g existe bien car $y \mapsto f(x+y)$ est continue). Donc $g(x) = \int_0^1 f(x).f(y)dy$=$f(x) \int_0^1 f(y)dy$ or $\int_0^1 f(y)dy$ est une constante (car f continue sur $[0, 1]$, donc bornée, et $\int_0^1 f(y)dy$=$F(0) - F(1) = cste$), donc :

$$g \text{ dérivable} \Leftrightarrow f \text{ dérivable}$$

[1]Source : Sabine, Isabelle. Tapée par Gwendal, réalisé avec LaTeX. Mis à jour le 08/06/2007. Plan pas encore au point.

Or en posant $t = x + y$, on a $g(x) = \int_0^1 f(x+y)dy = \int_x^{x+1} f(t)dt = F(x+1) - F(x)$ (F existe bien car f continue sur $[x; x+1]$ donc admet une primitive, et on a $F' = f$), donc g est dérivable (car F est dérivable, de dérivée f), et par suite f est dérivable.
De plus $g'(x) = f'(x).\int_0^1 f(y)dy = f'(x).K_1 = f(x+1) - f(x) = f(x)[f(1)-1] = f(x = .K$ (où $K_1 = \int_0^1 f(y)dy$ et $K_2 = f(1) - 1$)
Donc $f'(x).K_1 = f(x).K_2$, en particulier $f'(0).K_1 = f(0).K_2 = 1.K_2 = K_2$, donc $f'(0) = \dfrac{K_1}{K_2} =: K$, et $f'(x) = f'(0).f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ par récurrence. □

2 Recherche des solutions de E^*

Nous allons rechercher les solutions “suffisamment régulières”.

2.1 Recherche des solutions continues sur $\mathbb{R}$

On a vu que les fonctions exponentielles sont des solutions de E^*, et elles sont continues ; montrons que ce sont les seules.

Proposition : soit f une fonction continue solution de l'équation fonctionnelle E^*. Alors :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = [f(x)]^n$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ f(nx) = [f(x)]^n$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q},\ f(rx) = [f(x)]^r$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a^x$ (ie $f(x) = e^{x \ln a}$) où $a = f(1)$

Conclusion : **les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ solutions de E^* sont les fonctions exponentielles** (une fonction continue en un point de $\mathbb{R}$ et solution de E^* est continue sur $\mathbb{R}$, et donc est aussi une fonction exponentielle).

preuve :
(1) soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in E$ continue. Alors $f(nx) = f(x + ... + x) = f(x)...f(x) = f(x)^n$
(2) soit $n \in \mathbb{Z}_+^*$. $f(-x.n) = f(-x - x.... - x) = f(-x)...f(-x)$, or $f(0) = 1 = f(x - x) = f(x).f(-x)$, donc $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, et $f(-x.n) = \dfrac{1}{f(x)}...\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n}$, donc $f(N.x) = f(x)^N$ en posant $N = -n \in \mathbb{Z}_-$ (et donc propriété vraie sur $\mathbb{Z}$ tout entier, par (1)).
(3) soit $n = \dfrac{p}{q}$, $f(\dfrac{p}{q}x) = [f(x)]^{\frac{p}{q}}$? $f(px) = f(\dfrac{p}{q}.qx) = [f(x)]^p = f(\dfrac{p}{q}.qx) = f(\dfrac{p}{q}x + ... + \dfrac{p}{q}x) = f(\dfrac{p}{x})^q$; donc $f(x)^p = f(\dfrac{p}{q}.x)^q$, d'où $f(x)^{\frac{p}{q}} = f(\dfrac{p}{q}.x)$ (en multipliant par $f(x)^{\frac{1}{q}}$ de chaque côté, puis règle des fonctions puissances).
(4) $\forall r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(rx) = f(x)^r$, en particulier $f(1)^r = f(r)$ ie $f(r) = e^{r \ln f(1)}$ $\forall r \in \mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\exists (r_n) \in \mathbb{Q}$ tq $r_n \to x$, donc $f(r_n) = e^{r_n \ln f(1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Or f est continue, donc $f(r_n) \to f(x)$, et $x \mapsto exp(x)$ continue, donc $e^{r_n \ln f(1)} \to e^{x \ln f(1)}$, et par unicité de la limite, $f(x) = e^{x \ln f(1)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ □

remarque : une preuve plus rapide est possible : $[f \in E^*,\ f$ continue en $x_0 \Rightarrow]$ $fC^{+\infty}(\mathbb{R})$ et $f'(x) = f'(0).f(x)$, équation différentielle (ED) : $y' = ky$ de solution exponentielle. Mais on a besoin des équations différentielles dans cette preuve, et de la connaissance des exponentielles comme solution de ces (ED)...

2.2 Recherche des solutions monotones sur $\mathbb{R}$

Soit f une solution monotone sur $\mathbb{R}$, solution de E^*. Pour tout réel x, il existe des suites adjacentes (u_n) et (v_n) de nombres rationnels qui convergent vers x. Pour tout n, on a $f(u_n) = a^{u_n}$ où $a = f(1)$, la fonction exp_a étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la suite de terme général $(f(u_n))$ converge vers a^x (de même pour $(f(v_n))$). Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant f(x) \leqslant f(v_n)$ (ou $f(v_n) \leqslant f(x) \leqslant f(u_n)$, suivant que f croissante ou décroissante), donc en passant à la limite, $a^x \leqslant f(x) \leqslant a^x$, donc $f(x) = a^x$.

Conclusion : les solutions de E^* qui sont monotones sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions exponentielles.

3 Applications

3.1 Exemples d'équations fonctionnelles se ramenant à la précédente

Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ solutions des équations fonctionnelles :
(0) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
(1) $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x).f(y)$
(2) $f(x+y) + x + y = (f(x) + x).(f(y) + y)$
(3) $f(x+y) + x + y = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x).f(y)}$

preuve : (0) $f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow exp(f(x+y))=exp(f(x)) + exp(f(y))$, donc $\overline{exp(f}(x+y))=exp(f(x)).exp(f(y))$, donc en posant $g(x) = exp(f(x))$, on a $g(x+y) = g(x).g(y)$, donc $g(x) = a^x$ (ou $g(x) \equiv 0$), d'où $f(x) = \ln(a^x)$=$\ln(e^{x \ln a})$=$x \ln a$ ($a > 0$ pour que $x \mapsto a^x$ ait un sens , bien sûr), donc $f(x) = K.x$, $K \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, on vérifie que toute fonction $x \mapsto K.x$, $K \in \mathbb{R}$ vérifie bien (0)
(1) soit $g(x) := 1 + f(x)$, donc $g(x).g(y) = 1 + f(x) + f(y) + f(x).f(y)$=$1 + f(x+y)$=$g(x+y)$
Or les solutions continues sur $\mathbb{R}$ de $g(x).g(y) = g(x+y)$ sont $x \mapsto 0$ et $x \mapsto a^x$, donc les solutions de (1) sont $x \mapsto -1$ et $x \mapsto a^x - 1$
(2) soit $g(x) := f(x) + x$, donc $g(y) = f(y) + y$ et $(f(x) + x).(f(y) + y) = g(x).g(y)$=$g(x+y)$ Or les solutions continues sur $\mathbb{R}$ de $g(x).g(y) = g(x+y)$ sont $x \mapsto 0$ et $x \mapsto a^x$, donc les solutions de (2) sont $x \mapsto -x$ et $x \mapsto a^x - x$ $\square$

3.2 Exemples d'intervention des fonctions exponentielles

Beaucoup plus classique...

4 Compléments

4.1 Remarques

-ne pas oublier de citer la fonction nulle comme solution de monotone sur $\mathbb{R}$, ou continue sur $\mathbb{R}$, etc...
-$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ intervient pour dire qu'il existe une suite tq. etc...
-si f solution de E, alors f continue $\Leftrightarrow$ f monotone (on peut montrer cette équivalence avant si on veut).
-parler de la fausse fonction exponentielle
-a t-on : $f(x+y) = f(x).f(y) \Rightarrow f(x) = e^{\alpha x}$? Bien sûr que non, sinon on n'introduirais pas les conditions : f continue, f monotone, etc...

4.2 Fonction exponentielle

Introduction de la fonction exponentielle, etc...