Inégalités des accroissements finis - Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions

Prérequis[1] : -Théorème des valeurs intermédiaires
-Théorème de Rolle

1 Inégalité des accroissements finis

Théorème ( ) : Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

preuve : Soit φ tel que $\begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{array}$
On a $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$, donc par Rolle, $\exists c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ □

Corollaire : (I ´ ´)
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$. Si de plus, $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2$, tel que $m \leq f'(x) \leq M \ \forall x \in]a,b[$, on a alors :
$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a), \forall x \in]a,b[$.

remarques :
-Si f est bornée, le taux d'accroissement aussi.
-Pour m et M petit, si on connait $f(a)$, on peut donc approcher $f(b)$. Ex : calcul de $\sqrt{105}$
Soit $f : \begin{array}{ccc} [100,121] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$
On a : $\frac{1}{22} \leq f'(x) \leq \frac{1}{20}$, donc $\frac{5}{22} \leq \sqrt{105} - \sqrt{100} \leq \frac{5}{20}$, donc $10,22 \leq \sqrt{105} \leq 11,25$

Corollaire : soit $f : I \longmapsto \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur I (où I intervalle de bornes a et b). S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$, on a alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$$

Exemple : soit $|\cos a - \cos b| \leq |b-a|, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2 Application à l'étude de fonctions

2.1 Interprétation graphique

Soit f vérifiant les hypothèses du IAF. Alors $\forall\ x \in]a,b[$, $m(x-a) + f(a) \leq f(x) \leq M(x-a) + f(a)$, et $M(x-b) + f(b) \leq f(x) \leq m(x-b) + f(b)$.

ex : $f : \begin{array}{ccc} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$

[1] L'exposé a été présenté à Bordeaux(1) en 2005, tapé par Gwendal Haudebourg. Réalisé avec LaTeX. Mis à jour le 10/06/2007.

2.2 Théorème de Lagrange

Soit I un intervalle réel infini (ou non), et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I, et dérivable sur $\overset{o}{I}$.
Alors :
(i) $\forall x \in \overset{o}{I}, f'(x) \geqslant 0 \iff f$ croissante sur I
(ii)$\forall x \in \overset{o}{I}, f'(x) = 0 \iff f$ constante sur I

preuve : (i) ($\Rightarrow$) Si $\forall x \in \overset{o}{I}, f'(x) \geqslant 0$, on prend $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Alors le théorème des accroissements finis appliqué à $f \Rightarrow \exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. Comme $f'(c) \geqslant 0$, on obtient $f(b) \geqslant f(a)$, donc f croissante sur $[a, b]$, donc f est croissante sur I.
(i) ($\Leftarrow$) ne relève pas du TAF □

3 Application à l'étude de suite

3.1 Etude de suites par comparaison

Etude de $(u_n)_n$, $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$.
L'IAF appliqué à $f : \begin{array}{ccc} [x, x+1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln t \end{array}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$
On a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$
$$u_n \leq \ln 2n - \ln n \leq u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$
$$u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$$
$$\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \ln 2$$

D'où :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ln 2$$

remarque : si on nous demande une autre preuve de la convergence de u_n :

$$0 \leq u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0$$

Donc u_n est majorée, croissante, donc converge.

3.2 Etudes de suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème du point fixe :
Soit $f : [a, b] \longmapsto [a, b]$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq k, k \in [0, 1[$, alors $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

preuve : Existence :
$f(a) \leq a$, $f(b) \geq b$, car $f : [a, b] \longmapsto [a, b]$. Soit $g : \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$
On a : $g(a) \geq 0$, $g(b) \leq 0$, et g continue sur [a,b], donc d'après le TVI, $\exists x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$ (ie $f(x) = x$).
Unicité :
Soient x et y deux points fixes (ie $f(x) = x$, $f(y) = y$). D'après IAF, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, $\Rightarrow$ $|x - y| \leq |x - y|$, donc $x = y$. □

Corollaire : A
Sous les hypothèses du théorème précédent, soit $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in [a, b]$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors $(u_n)_n$ converge, et sa limite l, point fixe de f, est telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq k^n(b - a)$.

exemple : Etude de $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} + u_n}$

Si l existe, alors $l = \sqrt{\frac{3}{2} + l}$, d'où $l = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ $(l \geq 0)$.

$k = \frac{1}{\sqrt{14}} \leq \frac{1}{3}$, donc $|u_n - l| \leq \frac{1}{3^n}.2$