Expose 78 : Théorème de Rolle-Applications

Prérequis[1] :
-Notions de limite, de continuité, de dérivabilité
-L'image d'un segment réel par une fonction continue est un segment
-Thérême des valeurs intermédiaires
-Le sup et l'inf d'une fonction continue sont atteints sur un segment

1 Théorème de Rolle

Théorème : (T ´ ` R)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a)$=$f(b)$, alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

preuve : on sait que f est continue sur $[a, b]$, donc f est bornée et atteint ses bornes (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) inférieures m et supérieure M.
Si f est constante sur $[a, b]$, alors $\forall c \in]a, b[$, on a $f'(c) = 0$
Sinon, on doit avoir $m < f(a)$ ou $M > f(a)$. Si par exemple $m < f(a)$, soit $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = m$.
Alors $c \in$]a,b[car $f(b) = f(a) \neq$m, et $\forall x \in [a, b]$, on a $f(c) \leq f(x)$.
Donc $\forall x \in]a, c[$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ et $\forall x \in$]c,b[, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$
Or f est dérivable en c, donc $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existe, et $f'(c) = f'_d(c) = f'_g(d)$, donc $f'(c) = 0$. □

Interprétation géométrique : on montre qu'il existe au moins une tangente horizontale en un point d'abscisse intérieur à $[a, b]$.

Remarques :
a) Dans la démonstration, on établit (puis on utilise) qu'en un extremum *intérieur* où f est dérivable, la dérivée est nulle.
b) Le point c n'est pas forcément unique :
exemple 1 :
$f(x) = \sin x$ sur $[0, 2\pi]$; $f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2}) = 0$
c) On ne peut pas généraliser le théorème de Rolle aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$:
$f(x) = e^{ix}$ définie sur $[0, 2\pi] f$ est dérivable sur $[0, 2\pi]$ et $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$ $\forall x \in [0, 2\pi]$ (et $f(0) = f(2\pi)$)
d) La réciproque du théorème de Rolle n'est pas vraie en général : Soit la fonction
$f : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ $f'(0) = 0$ mais $f(a) = f(b)$ n'est réalisé que pour $a = b$
e) Il est nécessaire que f soit continue en a et b :
$f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - [x] \end{array}$ f est dérivable sur $[0, 1[$, discontinue en 1, et on a $f(0) = f(1) = 0$ mais
$\forall x \in [0, 1[$, $f'(x) = 1$
f) On ne peut pas se contenter de l'existence de la dérivée à droite (respect. à gauche) d'un point, il faut que la fonction f soit dérivable sur $]a, b[$ tout entier : $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$

[1]L'exposé a été tapé et présenté à Bordeaux(4) par Gwendal Haudebourg en 2004-2005, réalisé avec LaTeX. Mis à jour le 20/04/2006.

g) On travaille sur un intervalle, le théorème ne marche plus sur une réunion d'intervalle :

$$x \in [0,1] \cup [2,3] \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 3-x & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

On a $f(0) = f(3)$ mais la dérivée ne prend jamais la valeur 0.

Théorème : (E R ` ´) exemple : $I = [a, +\infty[$
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, avec $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Alors il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

preuve : si f est identiquement nulle, c'est trivial.
On suppose $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = l = 0$ (on peut toujours se ramener à ce cas). On suppose qu'il existe $\alpha > a$ tel que $f(\alpha) > 0$ (sinon, prendre $-f$). Soit alors v un réel fixé dans $]0, f(\alpha)[$. D'après le TVI, $\exists c_1 \in]a, \alpha[$ tel que $f(c_1) = v$. D'autre part, comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\exists d > \alpha$ tel que $f(d) < v$, d'après le TVI, $\exists c_2 \in]\alpha, d[$ tel que $f(c_2) = v$ (car $v < f(\alpha)$ et $v > f(d)$). Il ne nous reste qu'à appliquer Rolle à $[c_1, c_2]$. □

Exercice : soit f dérivable sur $]a, b[$ tel que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

preuve : On sait que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$ donc f n'est pas monotone sur $[a, b]$, donc *à fortiori* non strictement monotone. Donc, comme f continue, f n'est pas injective, donc $\exists (c, d) \in [a, b]^2$ tels que $f(c) = f(d)$, donc par le théorème de Rolle, $\exists k \in]c, d[$ tel que $f'(k) = 0$. □

exemple 2 : $f : x \in]0, \frac{1}{\pi}] \mapsto x \sin\frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$. Il existe une infinité de points [2] c tels que $f'(c) = 0$.

2 Applications

2.1 Théorème des Accroissements finis

Théorème : (A)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

preuve : soit $g : x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$
Donc $g(b) = g(a)$ et g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur]a,b[; on peut donc appliquer le théorème de Rolle à g : $\exists c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ Donc $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

Remarques :
a) Lorsque $f(a) = f(b)$, on retrouve bien évidemment le théorème de Rolle
b) Les remarques b) c) d) e) f) et g) du Théorème de Rolle sont valables pour le théorème des accroissements finis.
c) La même démarche permet d'obtenir une formule plus générale des accroissements finis : la formule de Taylor-Lagrange

Formule des Accroissements finis généralisés : soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a))$.

[2] cf fin de l'exposé

preuve : soit $h : x \mapsto (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$
Donc $h(b) = h(a)$ et h est continue sur $[a, b]$, dérivable sur]a,b[; on peut donc appliquer le théorème de Rolle à h : $\exists c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$, donc $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$ □

Exercice : (R` ’H)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient f et g deux fonctions réelles dérivables sur $I - \{a\}$, continues sur I (en particulier en a), et telles que $f(a) = g(a) = 0$, et $g'(x) \neq 0$ si $x \neq a$. Alors, s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f('x)}{g('x)} = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

preuve : soit $\varepsilon > 0$, il existe J intervalle ouvert contenant a tq. $|\frac{f'(y)}{g'(y)} - l| < \varepsilon$, $\forall y \in J \cap (I - \{a\})$. Soit $x \in J \cap (I - \{a\})$, on applique le théorème de Rolle à $G : t \to f(t)g(x) - f(x)g(t)$, $(G(a) = G(x) = 0)$. Il existe $c \in J \cap (I - \{a\})$ tq. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. On a donc $|\frac{f(x)}{g(x)} - l| < \varepsilon$. Ainsi $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ □

2.2 Sens de variation sur un intervalle

Théorème : (T ´ ` L)
Soit I un intervalle réel infini, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I, et dérivable sur $\overset{o}{I}$. Alors :
(i) $\forall x \in \overset{o}{I}, f'(x) \geqslant 0 \iff f$ croissante sur I
(ii) $\forall x \in \overset{o}{I}, f'(x) = 0 \iff f$ constante sur I

preuve :
(i) $(\Rightarrow)$ Si $\forall x \in \overset{o}{I}, f'(x) \geqslant 0$, on prend $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Alors le théorème des accroissements finis appliqué à $f \Rightarrow \exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$. Comme $f'(c) \geqslant 0$, on obtient $f(b) \geqslant f(a)$, donc f croissante sur $[a, b]$, donc f est croissante sur I.
(i) $(\Leftarrow)$ trivial, en utilisant la définition de dérivée (ne relève pas du TAF) : soit $x_0 \geqslant x$, $x - x_0 \leqslant 0$ et $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$, donc $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, d'où en passant à la limite $f'(x_0) \geqslant 0$ (de même si $x_0 \leqslant 0$). □

Remarque : le résultat prédédent n'est pas généralisable sur une réunion d'intervalles :
Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 0$
Cette fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $f(-1) < f(1)$

2.3 Existence et séparations des racines

Théorème : soient I un intervalle réel infini, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I, ayant n zéros sur I ($n \geqslant 2$). Alors f' admet au moins $(n - 1)$ zéros sur I, séparés par ceux de f.

preuve : soient $(a_1, ..., a_n)$ les n zéros de f tels que $a_1 < a_2.. < a_{n-1} < a_n$. Soit i, $1 \leqslant i \leqslant n$; f est dérivable sur $[a_i, a_{i+1}]$, donc continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, et $f(a_i) = f(a_{i+1})$. Donc par le théorème de Rolle, $\exists c_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0$. On a donc l'existence de $n - 1$ réels de I tels que $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, $f'(c_i) = 0$, et $a_1 < c_1 < a_2 < c_2 < ... < a_{n-1} < c_{n-1} < a_n$. □

2.4 Prolongements des fonctions dérivables

Théorème : soit I un intervalle réel infini, a un point de I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I (sauf peut-être au point a), et continue en a.
Si $\lim_{x \to a} f'(x) = l$ avec $l \in R$, alors f est dérivable en a, et $f'(a) = l$.

preuve : on pose I-$\{a\} = I_a$; on sait que $\lim_{x \to a} f'(x) = l$, donc $\forall \varepsilon$, $\exists \eta$ tel que $\forall x \in I_a \cap]a-\eta, a+\eta[$, $| f'(x) - l |< \varepsilon$.
Soit $x \in I_a \cap]a-\eta, a+\eta[$. D'après le TAF, $\exists c_x \in]x, a[$ tel que $f'(c_x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Or $c_x \in]a-\eta, a+\eta[$, donc $| f'(c_x) - l |< \varepsilon$, donc $\forall x \in I_a \cap]a-\eta, a+\eta[$, $| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - l |< \varepsilon$. Donc $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et $= l$. □

remarque : la réciproque est fausse

2.5 Trucs en plus - Questions d'oral

Théorème de Darboux : Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle.

preuve (de l'exemple) :
Soit $f : x \in]0, \frac{1}{\pi}] \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$.
Soit $u_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \geqslant 2$. On a : $f'(x) = sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}cos\frac{1}{x}$ et $f'(u_n) = -n\pi(-1)^n$, $f'(u_{n+1}) = -(n+1)\pi(-1)^{n+1}$, donc $f'(u_n)f'(u_{n+1}) < 0$, $n \geqslant 2$. Donc il existe $c_n \in]u_n, u_{n+1}[$ tel que $f'(c_n) = 0$ (en utilisant la continuité de f' sur $[u_n, u_{n+1}]$), donc il existe une infinité de points c tels que $f'(c) = 0$. □

Extension de Rolle à un intervalle non borné : (E : $I =]-\infty, +\infty[$)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Intérêt et exemple de la règle de l'Hospital :
Dans de nombreux cas, il est plus facile de chercher la limite du rapport des dérivées des fonctions, que celle des rapports des fonctions elles-même :
Soit $G(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\cos x}{\tan x}$ sur $]0, \frac{\pi}{4}]$. $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 1 + (\tan x)^2$. Alors, comme $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$, on a $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Inégalité des accroissements finis :
Dans l'enseignement secondaire, on ne parle pas du TAF, mais de l'inégalité des accroissements finis :
On a : $f(x) - f(a) = (x-a)f'(c)$ par le TAF classique, $c \in]a, x[$. Donc, si on sait majorer $f'(x)$ sur $]a, x[$, alors on a $| f(x) - f(a) | \leqslant | x - a | M$, où $M = \underset{c \in]a,x[}{sup} | f'(c) |$.

Remarque :
Il serait préférable de ne pas utiliser les preuves (pourtant usuelles) utilisant les c_x (qui ne sont pas des fonctions).
Exemple : preuve (rapide) de P ´ ´ ´ :
Soit $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)l$. $g(a) = 0$, et $g'(x) = f'(x) - l$, $\lim_{x \to a} g'(x) = 0$. Donc, par le TAF, $\exists c$ tel que $g(x) - g(a) = (x-a)g'(c)$, donc $| g(x) - g(a) |<| x - a | \varepsilon$ lorsque $x \to a$. Donc $| f(x) - f(a) - (x-a)l |<| x - a | \varepsilon$, ce qui veut dire que f est dérivable en a, et $f'(a) = l$.

2.6 Petit historique

2.6.1 Hospital Guillaume (marquis et compte) (1661-1704)

Mathématicien français ; suit les cours de Jean Bernouilli, dont t-il publie (après un arrangement financier) sous son propre nom un certains nombres de résultats (dont le théorème dit "De L'Hospital"). Cette supercherie sera dénoncé par Bernouilli à la mort de son élève.

2.6.2 Rolle Michel (1652-1719)

Mathématicien français ; travaux d'algèbre et d'analyse. S'oppose vigoureusement à l'introduction du calcul infinitésimal (avant de se laisser convaincre).
Il énonce le théorème dit "de Rolle", en 1691, sans le démontrer.

2.6.3 Lagrange Joseph Louis (1736-183)

Mathématicien français ; un des plus grand mathématicien de son époque, oeuvre immense : mécanique, analyse, groupes de permutations, prémices de la théories des groupes, théorie des fonctions, équations différentielles, etc...
Après la mort de sa première femme, il se remarie. Il affirme alors que de tous les prix du monde, celui qui a le plus de valeur est sa jeune femme (de 40 ans sa cadette...).