Exposé 72 : Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivées d'une fonction composée. Exemples.

Prérequis[1] :
-Dérivabilité en un point : 3 définitions équivalentes.
-fonctions usuelles. -Notions de limite et continuité -Si f dérivable en a, alors f continue en a.
Cadre : f est une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$, où D_f est un ensemble quelconque de $\mathbb{R}$. I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Le but de cet exposé est de passer d'une étude locale (dérivabilité en un point) à une étude globale : dérivée sur un ensemble.

1 Fonction dérivée

1.1 Définitions

Définition : (i) On dit que f est dérivable sur $I \subset D_f$ si(si) f est dérivable en tout point de I.
(ii) Soit f dérivable sur $I \subset D_f$, on appelle fonction dérivée l'application $f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$

1.2 Fonctions usuelles

D_f	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\lvert x\rvert$	1 si $x > 0$, -1 si $x < 0$	$\mathbb{R}^*$
$[0, +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

preuve : on passe à la définition de la dérivabilité en un point. □

2 Opérations algébriques

Soient f, g dérivables sur $I \subset (D_f \cap D_g)$

Théorème : (i) $(f+g)$ dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$
(ii) $(fg)'$ est dérivable sur I, et $(fg)' = f'g + fg'$
(iii) Si on suppose de plus que g ne s'annule pas sur I, alors $(\frac{1}{g})$ est dérivable sur I, et $(\frac{1}{g})' = \frac{-g'}{g^2}$

[1]Leçon fortement inspirée de celle de Johann. Tapée par Gwendal, réalisé avec LaTeX. Mise à jour le 18/04/2006.

Remarque : -on peut généraliser la propriété (i) : une somme finie de fonctions dérivables sur un même ensemble est dérivable sur cet ensemble.
-on peut étendre la propriété (iii) : avec les mêmes hypothèses : $(\frac{f}{g})$ est dérivable sur I et
$(\frac{f}{g})' = (f.\frac{1}{g})' = f'.\frac{1}{g} + f.\frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

preuve : (i) trivial
(ii) soit $x_0 \in I$. $\forall x \in I - \{x_0\}$, $\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)$
On conclut comme g continue en x_0, et f, g dérivable sur x_0 :
$\lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$
(iii) soit $x_0 \in I$ où g ne s'annule pas sur I. $\forall x \in I - \{x_0\}$,
$(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}).\frac{1}{x - x_0} = (-\frac{1}{g(x)g(x_0)}.\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$, or g continue sur I et g dérivable sur I, donc
$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x_0)^2}.g'(x_0)$ □

Applications : calcul de dérivées des fonctions suivantes :
-fonctions polynômes
-$x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}^*$
-$\tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice : f fonction dérivable sur I, $n \in \mathbb{N}^*$
(i) montrons que $(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$
(ii) montrons que $(\frac{1}{f^n})' = \frac{-nf'}{f^{n-1}}$

preuve : récurrence □

3 Dérivée d'une fonction composée

Théorème : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur J, $f(I) \subset J$. Alors $(g \circ f)$ est dérivable sur I, et $(g \circ f)' = f'.(g' \circ f)$

Applications : (i) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = g(ax+b)$, $(g \circ f)'(x) = ag'(ax+b)$
(ii) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dérivable, $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$, $(\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2.\sqrt{f(x)}}$, ou encore : l'application dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est l'application $x \mapsto \frac{f'(x)}{2.\sqrt{f(x)}}$
(iii) $(\cos u)'(x) = -u'(x).\sin x$, $(\sin u)'(x) = u'(x).\cos x$

Exercice : (i) si f dérivable, alors : f paire $\Leftrightarrow$ f' impaire
(ii) si f est définie sur $\mathbb{R}$ de période T et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f' est de période T

4 Dérivées successives

Définition : soit f dérivable sur $I \subset D_f$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est dérivable à l'ordre n sur I s'il existe des applications $f_0, ..., f_{n-1}$ dérivables sur I telles que $\begin{cases} f_0 = f \\ f_{k+1} = f_k', \forall k = 0...n-1 \end{cases}$
La dérivée d'ordre n de f sur I est alots $(f_{n-1})'$ notée $f^{(n)}$

Remarque : on pose parfois $f^{(0)} = f$, et on écrit indifféremment f' où $f^{(1)}$, et f'' ou $f^{(2)}$

Définition : on dit que f est C^k, $k \in \mathbb{N}$, sisi $f^{(k)}$ est définie et continue sur I. On dit que f est de classe $C^{+\infty}$ si(si) f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice : les fonctions polynômes, sinus, cosinus...

Théorème : formule de Leibniz : $n \in \mathbb{N}^*$, f dérivable à l'ordre n sur I, g dérivable à l'ordre n sur I. Alors (fg) est dérivable à l'ordre n sur I, et $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

5 Compléments

5.1 Preuves

preuve (formule de Leibniz) : par récurrence. $n = 0$ et $n = 1$ sont évidents : $n = 1$ $(fg)' = f'g + gf'$ soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la formule est vérifiée au rang $(n-1)$.

$(fg)^{(n)}=((fg)')^{(n-1)}=(f'g)^{(n-1)} + (fg')^{(n-1)}=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k . f^{(k+1)} . g^{(n-1-k)}+\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k . f^{(k)} . g^{(n-k)}=\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} . f^{(k)} . g^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} . f^{(k)} . g^{(n-k)}$

$=\sum_{k=1}^{n-1}(C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}) . f^{(k)} . g^{(n-k)}+C_{n-1}^0 . f . g^{(n)}+C_{n-1}^{n-1} . f^{(n)} . g$. Or $C_{n-1}^{n-1} = C_n^n$, $C_{n-1}^0 = C_n^0$ et $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$, d'où le résultat. □

preuve (fonction composée) : soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall x \in I - \{x_0\}$,

$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}=\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} . \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow g'(f(x_0)) . f'(x_0)$ □

Exercice : (i) si f dérivable, alors : f paire $\Leftrightarrow$ f' impaire
(ii) si f est définie sur $\mathbb{R}$ de période T et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f' est de période T

preuve : (i) montrons que f paire et dérivable $\Rightarrow$ f' impaire.
Soit $g : x \mapsto -x$. $(f \circ g)(x) = f(-x)$ et $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) . g'(x)=-1 . f'(-x)=-f'(-x)$. Or $f(x) = f(-x)$, donc $f'(-x) = -f'(x)$ ie f' impaire.
(ii) $f(x + nT) = f(x)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. On considère $g : x \mapsto x + nT$; $f \circ g(x) = f(x + nT)$. Or $f(x + nT) = f(x)$ et $(f \circ g)'(x)=f'(g(x)) . g'(x) = f'(x + nT)$, d'où $f'(x) = f'(x + nT)$ ie f' T-périodique. □

Exercice : soit f fonction dérivable sur I, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $(f^n)' = n . f' . f^{n-1}$

preuve : par récurrence. $n = 1$ est trivialement vrai ; on suppose que la formule est vraie pour $n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, ie $(f^{(n-1)})' = (n-1)f' . f^{(n-2)}$.

$(f^{(n)})' = (f . f^{(n-1)})'=f' . f^{(n-1)}+f(f^{(n-1)})'=f' . f^{(n-1)}+f(n-1)f' . f^{(n-2)}=f' . f^{(n-1)} . (n-1+1)=n . f' . f^{(n-1)}$ □

5.2 Dérivées des fonctions usuelles

(i) soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c \end{array}$ soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ d'où le résulat.

(ii) soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}=\frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

(iii) soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$. Si $x > 0$, $f(x) = x$ et $f'(x) = 1$, sinon $f(x) = -x$ et $f'(x) = -1$, donc f pas dérivable en 1.

(iv) soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $f(x_0+h) = (x_0+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_0^k k^{n-k}$

$= x_0^n + n x_0^{n-1} h + \sum_{k=0}^{n-2} h^{n-k} = f(x_0) + h(n x_0^{n-1}) + h.(h \sum_{k=0}^{n-2} x_0^k h^{n-2})$. Or $\lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{n-2} x_0^k h^{n-2} = 0$, donc $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$

(v) soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{x_0\}$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0).(x+x_0)}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$, donc $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ie $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

(vi) soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}^* - \{x_0\}$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \dfrac{\frac{x_0-x}{x.x_0}}{x-x_0} = \dfrac{-1}{x.x_0}$, donc

$\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{-1}{x_0^2}$

(vii) supposons que l'on sache que $\sin'(0) = 1$ (ie que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall h \neq 0$, $\dfrac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \dfrac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$

$= \sin x_0 . \dfrac{2(\sin\frac{h}{2})^2}{\frac{h}{2}} + \cos x_0 . \dfrac{\sin h}{h} = \sin x_0 . \dfrac{(\sin\frac{h}{2})^2}{\frac{h}{2}} + \cos x_0 . \dfrac{\sin h}{h}$, d'où $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \cos x_0$

5.3 Dérivabilitées : trois définitions équivalentes

1. $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A$
2. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$
3. $f(x_0+h) = f(x_0) + h.A + h.\varepsilon(h)$, avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$