Exposé 70 : Croissance comparée des fonctions réelles $x \to e^x$, $x \to x^a$, $x \to \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Applications. Calculatrice.

Prérequis[1] :
-Connaissance des fonctions citées dans le titre : définition, sens de variation, limites
-Opérations élémentaires sur les limites

INTRODUCTION : on a déjà vu que ces trois fonctions sont croissantes sur $]0,+\infty[$, et que leurs limites en $+\infty$ est $+\infty$. On cherche donc une "hiérarchie" de cette croissance vers $+\infty$; autrement dit, on veut comparer la vitesse de croissance vers $+\infty$ (on peut faire un tableau sur transparent).

1 Croissance comparée

1.1 Relation de comparaison

Définition : si f et g sont deux fonctions tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, f est dite prépondérante devant g (ou g négligeable devant f) si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Notation de Hardy : $g << f$, **Notation de Landau :** $g = \circ(f)$

Remarque : cette relation est transitive. Par abus de langage nous écrivons $g(x) << f(x)$ au lieu de $g << f$

1.2 Fonctions logarithmes et puissances

Lemme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

<u>preuve</u> : soit $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x - x \end{array}$
Avec une simple étude de fonction, on obtient : $f(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$
ie $\ln x < x$, $\forall x > 0$
ie $\ln \sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}$, $\forall x > 0$
ie $\dfrac{\ln x}{2} \leqslant \sqrt{x}$, $\forall x > 0$
Pour $x > 1$, $\ln x \geqslant 0$ d'où $0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$ or $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc (théorème des gendarmes)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\square$

[1] L'exposé a été tapé et présenté à Bordeaux(4) le 23/11/2005 par Gwendal, mis à jour le 06/02/2006.

Théorème 1 : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty$

preuve : $\frac{x^a}{(\ln x)^b} = (\frac{x^{\frac{a}{b}}}{\ln x})^b = (\frac{x^{\frac{a}{b}}}{\frac{b}{a} \ln x^{\frac{a}{b}}})^b = (\frac{a}{b}.\frac{x^{\frac{a}{b}}}{\ln x^{\frac{a}{b}}})$
on pose $X = x^{\frac{a}{b}}$, or $a > 0$ et $b > 0$ par hypothèse, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \lim_{X \to +\infty} (\frac{a}{b}.\frac{X}{\ln X}) = +\infty$$

Si $b \leqslant 0$, le résultat est trivialement vrai. □

Conséquence : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, (\ln x)^b << x^a$

Corollaire 1 : $\forall b \in \mathbb{R}, (\ln x)^b << P(x)$ où P est une fonction polynômiale non constante.

preuve : si $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ avec $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{P(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^n}.\frac{x^n}{P(x)}$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{P(x)} = \frac{1}{a_n}$ □

1.3 Fonctions puissances et exponentielles

Théorème 2 : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^a}{x^a} = +\infty$ ie $x^a << (e^x)^b$

preuve : $\frac{(e^x)^b}{x^a} = \frac{e^{bx}}{e^{a \ln x}} = e^{bx - a \ln x} = e^{x(b - \frac{a \ln x}{x})}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^b}{x^a} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{xb} = +\infty$ □

Corollaire 2 : $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $P(x) << (e^x)^b$ où $P(x)$ est une fonction polynôme non constante.

preuve : si $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ avec $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^b}{P(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^b}{x^n}.\frac{x^n}{P(x)}$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{P(x)} = \frac{1}{a_n}$ □

1.4 Résumé

Pour en revenir au problème initialement posé, pour tout triplet (a, b, c) de réels strictements positifs, les fonctions $x \to (\ln x)^b$, $x \to x^a$ et $(e^x)^c$ sont trictements croissantes sur $]0, +\infty[$, tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ et $(\ln x)^b << x^a << (e^x)^c$ au voisinage de $+\infty$

1.5 Visualisation

2 Applications

2.1 Avec la calculatrice

Soit $f: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\ln x)^5 x^5 e^{-x} \end{array}$

(i) Tracer f sur $[0,6]$. Que peut-on supposer ?
(ii) Refaire le tracé sur $[0,50]$
(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ?$

preuve : $f(x) = (\ln x)^5 x^5 e^{-x} = \dfrac{(\ln x)^5}{x^5} \times \dfrac{x^{10}}{e^x} \to 0$ □

2.2 Calcul de limites

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 1 - \ln x$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 + 1 - \ln x = \lim_{x\to+\infty} x^2(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}) = +\infty$$

Calculer $\lim\limits_{x\to0+} x^x$ (on pose $X = \dfrac{1}{x}$)

$$\lim_{x\to0+} x^x = \lim_{x\to0+} e^{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln\frac{1}{X}}{X}} = \lim_{X\to+\infty} e^{-\frac{\ln X}{X}} = 1$$

2.3 $\ln x$ n'est pas une fonction fraction rationnelle

On raisonne par l'absurde : $\ln x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q des fonctions polynômes
$P(x) = a_p x^p + ... + a_0$ avec $a_p \neq 0$ et $a_i \in \mathbb{R}$
$Q(x) = b_q x^q + ... + b_0$ avec $b_p \neq 0$ et $b_i \in \mathbb{R}$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on a $p > q$, donc $p - q > 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{p-q}} = 0$ (théorème 2)
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{p-q}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{x^{p-q}.Q(x)} = \dfrac{a_p}{b_q} = 0$ ce qui est absurde, car $a_p \neq 0$,, $b_p \neq 0$.

3 Compléments

3.1 Quelques limites utiles

$\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha(\ln x)^\beta = 0, \forall\alpha,\beta \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$

preuve : soit $X = \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0} x^\alpha(\ln x)^\beta = \lim\limits_{X\to+\infty} (\dfrac{1}{X})^\alpha(\ln X)^\beta = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{(\ln X)^\beta}{X^\alpha} = 0$ □

3.2 Une fonction C^∞

$$\text{Soit } f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{-1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On prouve par récurrence que : " $\forall x \neq 0, \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{\frac{-1}{x^2}}$ " , où P_n est une fonction polynôme.
On en déduit que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On pose $u = \dfrac{-1}{x^2}$, puis $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} P_n(u)e^{-u^2} = 0$ par le Corollaire 2

3.3 Théorème de composition des limites

Il faudrait rajouter dans les prérequis le théorème des composition des limites :

Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$, soit $a \in \mathring{A}$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to l} g(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = L$

3.4 Autres applications

1) A t'on $(\ln x)^b << (P(x))^{\frac{1}{3}}$ où P polynôme ?
$(P(x))^{\frac{1}{3}} = (a_n x^n + ... + a_0)^{\frac{1}{3}} = (x_n(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_0}{x^n}))^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{n}{3}}.f(x)$ où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a_n^{\frac{1}{3}}$
Donc $\dfrac{(\ln x)^b}{P(x)^1 3}\ \dfrac{(\ln x)^b}{x^n 3}.\dfrac{1}{f(x)} \to 0$
Donc $(\ln x)^b << (P(x))^{\frac{1}{3}}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2 + x + 1)^{1/3}}{(\ln e^{\sqrt{x}} + x^{12})^2} = ?$

Mettre des exercices issus du Balaguer

3.5 Autre définition

Une autre définition peut-être plus agréable :

Définition : si f et g sont deux fonctions $[a, +\infty[\to \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, f est dite prépondérante devant g (ou g négligeable devant f) s'il existe $h : I \supset J = [b, +\infty[\ \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ tq. $f = g.h$

3.6 Exercices

Montrons que $x^a << e^{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$
$x^a = (x^\alpha)^{\frac{a}{\alpha}} = (\dfrac{x^\alpha (e^{x^\alpha})^b}{(e^{x^\alpha})^b})^{\frac{a}{\alpha}} = (\dfrac{x^\alpha}{(e^{x^\alpha})^b})^{\frac{a}{\alpha}}((e^{x^\alpha})^b)^{\frac{a}{\alpha}} \longrightarrow 0$

Montrons que $x^a << x^{\ln x}$, $a \in \mathbb{R}$
$\dfrac{x^a}{x^{\ln x}} = x^{a-\ln x} = e^{a\ln x - (\ln x)^2} = e^{(\ln x)^2(\frac{a}{\ln x} - 1)}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^a}{x^{\ln x}} = 0$
Montrons que $x^{\ln x} << e^{cx}$, $c \in \mathbb{R}$
$e^{(\ln x)^2 - cx} = e^{x(\frac{(\ln x)^2}{x} - c)} \to 0$

De même, on montre que : $x^{\ln x} << e^{x^\alpha}$ et $(\ln x)^b << x^{\frac{1}{\ln(\ln x)}}$