Exposé 67 : Fonctions polynômes

Prérequis[1] : -fonctions puissances $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$
-"principe" de récurrence

Cadre : on considère le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Généralitées sur les fonctions polynômes

1.1 Définition

Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. On dit que f est une fonction polynôme sur $\mathbb{K}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et un $(n+1)$ uplets $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $\forall x \in \mathbb{K}$

$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est appelé écriture polynômiale de f (unicité montré plus loin, dans le cas $f \not\equiv 0$).

exemples : les fonctions constantes, affines et puissances sont des fonctions polynômes.

1.2 Propriété fondamentale

Théorème : soient $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Alors : $(\forall x \in \mathbb{K}, \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0) \Leftrightarrow (a_0 = ... = a_n = 0)$

preuve :
$(\Leftarrow)$ évident
$(\Rightarrow)$ par récurrence : $\mathcal{P}_n : (\forall x \in \mathbb{K}, \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0) \Rightarrow (a_0 = ... = a_n = 0)$
$\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie
Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[\mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_n]$. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{P}_{n-1}$.
Soit $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$ $\forall x \in \mathbb{K}$.
En particulier $f(2x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (2x)^k = 0$ et $2^n f(x) = 0$ d'où $2^n f(x) - f(2x) = 0 = \sum_{k=0}^{n} (2^n - 2^k) a_k x^k$
$= \sum_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k) a_k x^k = 0$. Donc par l'hypothèse de récurrence : $(2^n - 2^k) a_k = 0$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ or $2^n \neq 2^k$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $a_k = 0$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, donc $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = a_n x^n$; or $f(x) = 0 \Rightarrow a_n x^n = 0$, $\forall x \in \mathbb{K}$; par ailleurs $f(1) = a_n$, d'où $a_n = 0$, et par suite $\forall k \in \mathbb{K}$, $a_k = 0$ d'où $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. $\square$

1.3 Unicité de l'écriture polynomiale

Théorème : soit f une fonction polynôme non nulle. Alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et un unique $(n+1)$ uplets $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$ tq. $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$

preuve : l'existence est claire, car f est supposée être une fonction polynôme non nulle.
unicité : soit f non nulle. On suppose $\exists n \in \mathbb{N}$, $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $a_n \neq 0$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $(b_0, ..., b_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$, $b_p \neq 0$ tq. :
$\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_p x^p$

[1] L'exposé s'inspire de celui de Johann et de celui de Sandra, plus des nombreux compléments de M.T. Tapé par Gwendal. Mis à jour le 17/06/2007.

On suppose par exemple $n \geqslant p$; donc $\forall x \in \mathbb{K}, (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + ... + (a_p - b_p)x^p + a_{p+1}x^{p+1} + ... + a_n x^n = 0$
D'après le théorème précédent, on a : $\forall 0 \leqslant k \leqslant p, a_k - b_k = 0 \Leftrightarrow a_k = b_k$ et $\forall k > p, a_k = 0$
On a donc unicité de l'écriture polynomiale dans le cas $f \not\equiv 0$. □

Proposition : deux fonctions polynômes sont égales ssi leurs coefficients de mêmes indices sont égaux.

Définition : dans le théorème précédent, n est appelé degré de la fonction polynôme f, on note $deg(f) = n$, ie $deg(f) := max\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$
Par convention, si $f \equiv 0$ alors $deg(f) = -\infty$ (on utiliste cette convention pour la formule du degré d'un produit).

2 Opérations sur les fonctions polynômes

Soient f et g deux fonctions polynômes. On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k$, $b_p \neq 0$

2.1 Somme

Proposition : $(f + g)$ est une fonction polynôme et $deg(f + g) \leqslant max(deg(f), deg(g))$. De plus, si $deg(f) \neq deg(g)$, alors $deg(f + g) = max(deg(f), deg(g))$

preuve : on suppose $p \leqslant n$. $\forall x \in \mathbb{K}, (f + g)(x) = \sum_{k=0}^{p}(a_k + b_k)x^k + \sum_{k=p+1}^{n}(a_k x^k)$ d'où le résultat. □

2.2 Produit

Proposition : $(f.g)$ est une fonction polynôme et $deg(f.g) = deg(f) + deg(g)$.

preuve : $\forall x \in \mathbb{K}, (f.g)(x) = (\sum_{k=0}^{n} a_k x^k).(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{p}(a_k b_l x^{k+l})$ donc $(f.g)(x) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k x^k$
où $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. De plus, $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ donc $c_{n+p} = a_n b_p \neq 0$
donc $deg(f.g) = p + n = deg(f) + deg(g)$ □

remarque : $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, (\lambda f)$ est une fonction polynôme et $deg(\lambda f) = deg(f)$. En effet : $(\lambda f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$

2.3 Composée

Proposition : $(f \circ g)$ est une fonction polynôme et $deg(f \circ g) = deg(f).deg(g)$.

preuve : $\forall x \in \mathbb{K}, (f \circ g)(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k(g(x))^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(\sum_{l=0}^{p}(b_l x^l)^k$
donc $f \circ g$ est une fonction polynôme, dont le terme de plus haut degré a pour coefficient $a_n(b_p)^n$ □

2.4 Polynômes à degrés echelonnés

Proposition : soit n un entier, soit f une fonction polynôme de degré n, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, f_k est une fonction polynôme de degré k. Alors il existe un unique $(n + 1) - \mathbb{K}$ uplets $(a_0, ..., a_n)$ tq. $f = a_0 f_0 + ... + a_n f_n$ avec $a_n \neq 0$

3 Etude de la fonction polynôme

3.1 Limites

Proposition : soit f une fonction polynôme de degré n. Alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} a_n x^n$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$

3.2 Propriétés différentielles

Proposition : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Alors $f \in C^\infty(\mathbb{K})$, et on a :

(i) $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

(ii) $f^{[r]}(x) = \sum_{k=r}^{n} \frac{k!}{(k-r)!} a_k x^{k-r}$

preuve : (i) $\forall k \in \mathbb{N}$, $g_k : x \mapsto x^k$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{K})$ donc f est $C^\infty(\mathbb{K})$ comme somme de fonctions $C^\infty(\mathbb{K})$, et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(a_k g_k)'(x) = k a_k x^{k-1}$ et $g_0'(x) = 0$, donc $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

(ii) par récurrence. □

remarque : -si $k > n$, $f^{[k]} = 0$
-si $a_n \neq 0$, $f^n \not\equiv$

3.3 Formule de Taylor

Proposition : soit $x_0 \in \mathbb{K}$, f une fonction polynôme de degré n. Alors on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

preuve : d'après le théorème des polynômes à degré échelonnés, $(x - x_0)^k$ étant un polynôme de degré k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, on a : $\exists(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq. $f(x) = \alpha_n(x - x_0)^n + \alpha_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + ... + \alpha_0$.
On dérive à l'ordre k et on obtient $f^{(k)}(x) = k!\alpha_k + (x - x_0)g(x)$ avec g fonction polynôme.
$f^{(k)}(x_0) = k!\alpha_k$ ie $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ □

4 Divisibilité et racines

Soit f une fonction polynôme de degré n

4.1 Définition

Définition : soit g une fonction polynôme. On dit que :
- f est divisible par g s'il existe h fonction polynôme tq. $f = gh$
- $a \in \mathbb{K}$ est racine de f si $f(a) = 0$

Théorème : soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors [α est racine de f] $\Leftrightarrow$ [il existe une fonction polynôme h tq. $f(x) = (x - \alpha)h(x)$] (ie tq. f divisible par $(x - \alpha)$)

preuve :
($\Leftarrow$) trivial.
($\Rightarrow$)soit $\alpha \in \mathbb{K}$ racine de f $\Leftrightarrow$ ie $f(\alpha) = 0$. On applique la formule de Taylor à f : au point α
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x - \alpha)^k = f(\alpha) + (x - \alpha).[\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x - \alpha)^{k-1}]$ donc $(x - \alpha)$ divise f □

Théorème : soit k fixé, $\alpha \in \mathbb{K}$, $k \geqslant 1$, f une fonction polynôme. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) il existe g fonction polynôme tq. $f(x) = (x - a)^k g(x)$ $\forall x \in \mathbb{K}$ et $g(a) \neq 0$
(ii)$f(a) = f'(a) = ... = f^{(k-1)}(a) = 0$ et $f^{(k)}(a) \neq 0$

Définition : on dit alors que a est racine de f d'ordre k

preuve : d'après Taylor, (ii)$\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + ... + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ car $f(a) = ... = f^{(k-1)}(a) = 0$
Donc $f(x) = (x-a)^k g(x)$ où $g(x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j-k}$ donc g est une fonction polynôme
$g(a) = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} + \dfrac{f^{(k+1)}(a)}{k+1!}(a-a) + ... + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(a-a)^{n-k} = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ donc $g(a) \neq 0$
(i) $\Rightarrow$ (ii) calcul (cf. polycopié) □

Théorème : soit f une fonction polynôme de degré n, $f \not\equiv 0$. Alors f admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$
De plus, si f admet n racines distinctes $\alpha_1, ..., \alpha_n$, alors $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda(x-\alpha_1)...(x-\alpha_n)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$

preuve : si admet k racines avec $k > n$, alors il existe g fonction polynôme tq. $f(x) = (x-\alpha_1)...(x-\alpha_k)g(x)$.
$\forall i \in [\![0, k]\!]$, $(x-\alpha_i)$ est de degré 1, donc $f(x)$ est de degré $k \geqslant n$ d'où la contradiction.
Si f admet n racines distinctes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ alors il existe g fonction polynôme tel que
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-\alpha)...(x-\alpha_n)g(x)$ donc $deg(g) = 0$, donc $g(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{K}$ □

5 Applications

6 Compléments

6.1 Polynômes-Fonctions polynômes

Quelle est la différence entre un polynôme et une fonction polynôme ?

Définition : (POLYNÔME)
Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif unitaire. Un **polynôme** à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite finie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang (ex : $(a_0, a_1, ..., a_n, 0, ..., 0, ...)$), munie de la structure usuelle :

- $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$, $i = 1...n$
- $\lambda(a_i) = (\lambda a_i)$, $i = 1...n$

Les suites $e_0 = (1, 0, 0, ...)$, $e_1 = (0, 1, 0, ...)$, $e_2 = (0, 0, 1, , 0...)$,...,$e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ forment une base de $\mathbb{K}$: $(a_n)_n = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n e_n$
Or $e_1^2 = (0, 0, 1, ...) = e_2$, $e_1^3 = (0, 0, 1, ...) = e_3$,..,$e_1^n = (0, ..., 0, 1, 0...) = e_n$ et $e_1^0 = e_0$
Donc tout polynôme s'écrit : $(a_n)_n = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n e_1^n$, soit en posant $X = e_1$:

$$(a_n)_n = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$$

6.2 Une fonction bien pratique

$$\Omega : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{K}) \\ \text{P}= \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n X^n & \longmapsto & \tilde{\text{P}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \end{array} \end{array}$$

Ω est clairement un homomorphisme surjectif, et :

$$\boxed{\Omega \quad \text{INJECTIVE} \Longleftrightarrow \mathbb{K} \quad \text{INFINI}} \ (1)$$

Ainsi, si $\mathbb{K}$ est infini (ex : $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), les polynômes seront identifiés aux fonctions polynômes.
(dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on écrira $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ou $f \in \mathbb{R}[X]$ même si pas "vraiment" la même chose).
Contre exemple : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (Ω non injectif)

preuve :
-si $\mathbb{K}$ est fini, $\mathbb{K} = \{x_1, ..., x_q\}$
$P(X) = (X - x_1).(X - x_2)...(X - x_q) = X^q + ...$ donc $P \not\equiv 0$ mais $\tilde{P}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{K}$, donc $\Omega(P) = 0 \not\Rightarrow P = 0$, donc $\mathbb{K}$ fini $\Rightarrow \Omega$ non injective.
-si $\mathbb{K}$ infini, $P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall x \in \mathbb{K}$, $\tilde{P}(x) = 0$ (infinité de racines dans $\mathbb{K}$).
Or un polynôme de degré $\leqslant n$ admet au plus n racines (sauf le polynôme nul) donc Ω est injective. □

$\mathbb{K}[X]$: ensemble des polynômes à une indéterminée
$\mathcal{P}(\mathbb{K})$ ensemble des fonctions polynômes
Si $\mathbb{K}$ corps, alors $\mathbb{K}[x]$ ev

6.3 Importance de l'unicité de l'écriture polynomiale

Si l'on ne montre pas l'uncité de l'écriture polynômiale, on ne peut pas parler de degré d'un polynôme (ie on raconte n'importe quoi !) :
Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k cos^k x + b_k sin^k x$ que l'on appellera polynôme trigonométrique
$cos^4 - sin^4$ "est de degré 4"
or $cos^4 - sin^4 = cos^2 - sin^2$ donc "est degré 2" d'où le problème !
On ne peut pas définir le degré d'un polynôme trigonométrique, car il n'y a pas décomposition de l'écriture polynômiale.

6.4 La convention $deg(0) = -\infty$

Pourquoi prendre comme convention : $deg(0) = -\infty$? On connait les règles :
$deg(f + g) = max(deg(f), deg(g))$
$deg(f.g) = deg(f) + deg(g)$ pour tout f, g non identiquement nulles
On peut étendre ces règles avec le polynôme nul avec la convention $deg(0) = -\infty$, en ajoutant deux "règles"

$$-\infty + n = -\infty \ \forall n$$
$$-\infty < 0$$

6.5 Exercices et applications

6.5.1 Exercice 1

Montrer qu'une fonction T-périodique admet une infinité de racines.

$f(x + T) = f(x)$ donc $f(x + T) - f(x) = 0$, donc si α racine de f, $f(\alpha + T) - f(\alpha) = f(\alpha + T) = 0$ donc $\alpha + T$ solution, donc f admet une infinité de racines : $\alpha + kT, k \in \mathbb{Z}$

6.5.2 Exercice 2

Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ anneau intègre

Soient f, g deux fonctions polynômes tq. $f.g = 0 \Rightarrow deg(f.g) = -\infty$ or $deg(f.g) = deg(f) + deg(g)$
Donc ($deg(f) = -\infty$ et $deg(g) = 0$) ou ($deg(g) = -\infty$ et $deg(f) = 0$)
donc $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$ donc $\mathbb{K}$ anneau intègre.

6.5.3 Exercice 3

Soit f une fonction polynôme sur $\mathbb{K}$ de coefficients (a_p).
Montrer que :
(i) f est paire $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$
(ii) f est impaire $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = 0$

(i) $f(x) = -f(x) \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{n} a_p x^p = \sum_{p=0}^{n} a_p(-x)^p, \forall x \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{n}(a_p - (-1)^p a_p)x^p \Leftrightarrow a_p - (-1)^p a_p = 0, \forall p \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow (a_{2k} = a_{2k}$ et $a_{2k+1} = -a_{2k}, \forall k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow a_{2k+1} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.
(ii) idem

6.5.4 Exercice 4

Soit f une fonction polynôme sur $\mathbb{C}$, de coefficients (a_p) tq. $\forall x \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall p$, $a_p \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \overline{f(x)} \Leftrightarrow a_0 + ... + a_n x^n = \overline{a_0 + ... + a_n x^n}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a_0 - \overline{a_0}) + ... + (a_n - \overline{a_n})x^n = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, a_p - \overline{a_p} = 2i.Im(a_p) = 0 \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, a_p \in \mathbb{R}$

6.5.5 Exercice 5

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}$, $(x^p - a^p) = (x-a).(x^{p-1} + ... + a^k x^{p-1-k} + ... + a^{p-1})$

$(x-a).(x^{p-1} + ... + a^k x^{p-1-k} + ... + a^{p-1}) = x^p + ax^{p-1} + a^2x^{p-2} + ... + a^{p-2}x^2 + a^{p-1}x$
$-ax^{p-1} - a^2x^{p-2} - ... - a^{p-1}x - a^p = x^p - a^p$

6.5.6 Exercice 6

Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$ n'est pas une fonction polynôme.

On raisonne par l'absurde : si f est une fonction polynôme, comme $f \not\equiv 0$, $deg(f) \geqslant 1$
or $((\sqrt{x})^{\frac{1}{3}})^3 = x$ donc $deg(x) = 1 = deg((\sqrt{x^{\frac{1}{3}}})^3)$=$3.deg(\sqrt{x^{\frac{1}{3}}}) \geqslant 3$ contradiction
Donc f n'est pas une fonction polynôme.

6.5.7 Exercice 7

Montrer que les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ sont les fonctions constantes nons nulles.

Soit f inversible d'inverse g, $f \not\equiv 0$ (car f inversible).
On a : $f.g = Id$ ie $f.g(x) = 1$ (1 étant le polynôme unité pour la loi ".") donc $deg(f) + deg(g) = 0$.
Or $deg(f) \geqslant 0$ et $deg(g) \geqslant 0$ (par hypothèse), donc $deg(f) = deg(g) = 0$ donc f est une fonction constante non nulle.

6.6 Autres démonstrations de la propriété fondamentale

Il est possible de démontrer la propriété fondamentale d'autres façons, mais on a besoin de la dérivabilité de la fonction polynôme ou de sa continuité (propriétés que l'on voit plsu tard dans la leçon).

6.6.1 Par la dérivabilité

Soit $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$. Or f est C^∞, donc :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \\ ... \\ f^k(0) = 0 \Rightarrow a_k = 0 \\ ... \end{cases}$$

Donc $a_0 = ... = a_n = 0$ □

6.6.2 Par la continuité

Soit $\forall x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On a : $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$
Donc $f(x) = a_1 x + ... + a_n x^n = 0$ donc pour $x \neq 0$, $a_1 + ... + a_n x^{n-1} = 0$
Soit $g(x) = a_1 x + ... + a_n x^{n-1}$ (que l'on définie si $x \neq 0$) ; g est continue en 0 (quitte à la prolonger par continuité en

0), donc :

$$0 = \lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = a_1$$

Donc $a_1 = 0$. On refait le même raisonnement, et par suite : $a_0 = ... = a_n = 0$ $\square$

6.7 preuve

Proposition : Soit n un entier, soit f une fonction polynôme de degré n, $\forall k \in [\![0, n]\!]$, f_k est une fonction polynôme de degré k. Alors il existe un unique $(n+1) - \mathbb{K}$ uplets $(a_0, ..., a_n)$ tq. $f = a_0 f_0 + ... + a_n f_n$ avec $a_n \neq 0$

preuve : on va montrer que $\{f_0, ..., f_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (ev : ensemble des fcts. polynômes de degrés inférieurs ou égauxs à $n+1$)
Soit $(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq. $\alpha_0 f_0 + ... + \alpha_n f_n = 0$
On a donc $-\alpha_n f_n = \alpha_0 f_0 + ... + \alpha_{n-1} f_{n-1}$
si $\alpha_n \neq 0$, alors $-\alpha_n f_n$ est un polynôme de degré n et $\alpha_0 f_0 + ... + \alpha_{n-1} f_{n-1}$ est un polynôme de degré degré inférieur ou égal à $n-1$, ce qui est absurde, donc $\alpha_n = 0$. Par suite, $\alpha_0 = ... = \alpha_n = 0$
Donc $\{f_0, ..., f_n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$; or $dim(\mathbb{K}_n)[X]) = n$, donc $\{f_0, ..., f_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ $\square$