Exposé 64 : Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

Prérequis[1] : -Propriété de $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure
-Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.
-Intervalle réel : ce sont les parties de I de $\mathbb{R}$ telles que $[\forall (a,b) \in I^2,\ a \leq t \leq b] \Rightarrow [t \in I]$
-Bijection, surjection, injection, bijection réciproque, continuité

Cadre : dans tout l'exposé, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$d'intérieur non vide, f une fonction réelle définie sur I.

1 Image continue d'un intervalle, d'un segment

1.1 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, si $(a,b) \in I^2$ tq. $f(a) \neq f(b)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(a) < t < f(b) \Rightarrow t \in f(I)$

remarque : le TVI est plus souvent écrit sous la forme suivante (avec les mêmes hypothèses) :
$\forall \gamma \in [f(a), f(b)]$, $\exists c \in I$ tq. $f(c) = \gamma$

preuve (Théorème des valeurs intermédiaires) :
on suppose $a < b$ et $f(a) < t < f(b)$. Soit $E := \{x \in [a,b]\, tq.\, f(x) \leq t\}$
-$E \neq \emptyset$ car $a \in E$
-E est majorée par b, donc $c = supE$ existe, $c \in [a,b]$ ($c \leq b$ car E majoré par b, $c \geq a$ car c majorant de E).
Il existe donc $(x_n)_n \in E$ tq. $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Or f continue, donc $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$
or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq t$, d'où $f(c) \leq t$
On a $f(c) \leq t < f(b)$ d'où $c < b$.
D'autre part, $\forall x \in]c, b[$, on a $f(x) > t$ ($c = supE$), donc à partir d'un certain rang, $f(c + \frac{1}{n}) > t$. On en déduit par passage à la limite que $f(c) \geq t$. Finalement, il existe $c \in [a,b]$ tq. $f(c) = t$. □

Corollaire 1 : I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, alors $f(I)$ intervalle
(ie l'image d'un intervalle I par une fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$ est un intervalle)

remarque : le TVI est parfois écrit directement sous cette forme.

Corollaire 2 : I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $(a,b) \in I^2$, $a < b$ tq. $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a,b[$ tq. $f(c) = 0$.

preuve : la preuve de ces deux théorèmes est immédiate par le TVI □

[1] L'exposé a été présenté à Bordeaux(1) en 2004 par Lionel, corrigé par M.Z., tapé par Gwendal. Réalisé avec LaTeX. Mise à jour le 10/06/2007.

remarques :
(a) L'image d'un intervalle par une application discontinue n'est pas en général un intervalle :
$I = [0;1]$, $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & si \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & si \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ et $f([0;1])=\{0;1\}$
(b) La continuité n'est que suffisante (ce n'est pas une condition nécessaire) :
$f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} x & si \quad x \in]0,1[\\ 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$ transforme $[0,1]$ en lui-même, mais f non continue
$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & si \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ transforme tout intervalle réel en un intervalle réel (si $0 \in I$, $f(I) = [-1,1]$), mais f non continue.
(c) Si I n'est pas un intervalle, le théorème n'est plus vrai : $f(x) = x$ continue sur $I = [-2,-1] \bigcup [1,2]$, $f(I) = [-2;-1] \cup [1;2]$. On a $f(-2) < 0 < f(2)$ mais 0 n'est pas une valeur atteinte par f ($\nexists \gamma \in I$ tq. $f(\gamma) = 0$)
(d) Si I est un intervalle d'un ensemble autre que $\mathbb{R}$, le théorème n'est plus vrai (il faut la borne sup) :
$f : x \in \{x \in \mathbb{Q}, 0 \le x \le 2\} \mapsto x^2 - 2$ continue sur $[0,2]$ de $\mathbb{Q}$, mais $0 \in]f(0), f(2)[$ n'est pas atteint par f.
(e) Dans la preuve, le point c est la plus grande $x \in [a,b]$ tq. $f(x) = y$, mais une telle équation en x n'a pas à priori **une unique solution** : $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$. $y = 1$ est atteinte en -1 et 1.
(f) A priori, les intervalles I et $f(I)$ (avec f continue) ne sont pas de même nature :
$]0,1[\to \left[0, \frac{1}{2}\right[$ où $f : x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ (ie ouvert $\to$ non ouvert)
$]0,1] \to [1,+\infty[$ où $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ (ie borné non fermé $\to$ fermé non borné)

exercices : (1) Soit f une application continue sur $[a,b]$, $(a \le b)$ et à valeurs dans $[a,b]$. Alors f admet au moins un point fixe.
preuve : On considère $g(x) = f(x) - x$. g est continue et $g(a) = f(a) - a > 0$ (car $f(a) \in [a,b]$), $g(b) = f(b) - b < 0$ et $g(a).g(b) < 0$ donc $\exists x_0 \in [a,b]$ tq. $g(x_0) = 0$, donc tq. $f(x_0) = 0$
(2) Toute fonction polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.
preuve : $f(x) = a_0 + ... + a_{2n}x^{2n} + x^{2n+1}$ (quitte à diviser tous les coefs. par a_{2n+1}). Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, on en déduit l'existence de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq. $f(a) < 0 < f(b)$. D'où $f(a).f(b) < 0$ et $\exists x \in]a,b[$ tq. $f(x) = 0$.

remarque : on a vu que les intervalles I et $f(I)$ (avec f continue) ne sont pas (forcément) de même "nature". Cependant, nous allons voir que dans le cas particulier des segments (intervalles fermé-borné), f conserve la "nature" de ces segments.

1.2 Image d'un segment

Théorème :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, alors :
(1) f est bornée sur $[a,b]$
(2) f atteint ses bornes

preuve (IMAGE D'UN SEGMENT) :
(1) Par l'absurde. Si f non bornée sur $[a,b]$, alors $\exists (x_n)_n \subset [a,b]$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n)| > n$. $(x_n)_n$ est bornée, donc par Bolzano-Weierstrass, $\exists x_{\varphi(n)} \subset [a,b]$ tq. $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = l \in [a,b]$.
f est continue sur $[a,b]$, donc $\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l)$
$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_{\varphi(n)})| > \varphi(n) \ge n$ (car φ strictement croissante, et $\varphi(n) \in \mathbb{N}$) ; donc $\lim f(x_{\varphi(n)}) = +\infty$
(2) Par (1), on sait que f est bornée. Soit $M = sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a,b]$ tq. $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \le M$. $(x_n)_n$ est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\exists (x_{\varphi(n)}) \subset [a,b]$ tq.

$lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = l \in [a,b]$ (car $[a,b]$ fermé). f est continue sur $[a,b]$, donc $\lim_{n\to\infty}(x_{\varphi(n)}) = f(l)$. On a également $\forall n \in \mathbb{N}$, $M - \dfrac{1}{\varphi(n)} < f(x_{\varphi(n)}) \leq M$, donc $\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = M$ donc $M = f(l)$ avec $l \in [a,b]$. Idem pour l'inf. □

Corollaire 3 : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
Plus précisément, si f continue sur $[a,b]$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$, alors $f([a,b]) = [m,M]$ où $m = inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

preuve : le théorème précédent donne $f([a,b]) \subseteq [m,M]$. Comme ces bornes sont atteintes sur $[a,b]$, le TVI fournit l'autre inclusion. □

remarques :

(a) Une fonction non continue sur un segment n'est à priori pas bornée : $f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$
(b) Si l'intervalle considéré dans le théorème n'est pas un segment, on ne peut pas conclure :
$f : x \in]0,1] \mapsto x$ n'atteint pas sa borne inf.
$f : x \in]0,1] \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas majorée
$f : x \in [0,\infty[\mapsto x$ n'est pas majorée
(c) Dans le théorème et le Corollaire, la continuité n'est qu'une condition suffisante :
$f : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} x & si \quad x \in]0,1[\\ 1 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$
(d) Notons également que toute fonction **monotone** sur $[a,b]$ est borné et atteint ses bornes, mais l'image de $[a,b]$ n'est plus nécessairement un intervalle.

2 Fonctions continues strictement monotones sur un intervalle

Lemme 1 : soit $f : I \to \mathbb{R}$ où $I \subseteq \mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$, dont la réciproque est strictement monotone sur $f(I)$ et de même sens de variation que f.

remarque : ce théorème reste vrai pour $f : D \to \mathbb{R}$ où D pas forcément un intervalle !

preuve : montrons que f est injective : soient $x \neq y$, alors par exemple $x < y$ et si f est croissante, alors $f(x) < f(y)$ d'où d'où $f(x) \neq f(y)$ donc f injective (ou par l'absurde), donc $f : I \to f(I)$ bijective (clairement surjective).
Soit f^{-1} sa réciproque, et soient $a,b \in f(I), a < b$. Il existe $x,y \in I$, $x < y$ tq. $a = f(x)$ et $b = f(y)$ (f supposée croissante). Donc $f^{-1}(a) = x$, $f^{-1}(b) = y$ donc $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$, donc f^{-1} croissante. □

Lemme 2 : soit $f : I \to \mathbb{R}$ où $I \subseteq \mathbb{R}$. Si f est monotone sur I, et si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur E.

remarque : ce théorème reste vrai pour $f : D \to \mathbb{R}$ où D pas forcément un intervalle !

preuve : supposons f croissante sur I. S'il existait un point $x_0 \in I$ en lequel f serait discontinue, on aurait $\lim_{x\to x_{0^-}} < f(x_0)$ (i) ou $\lim_{x\to x_{0^+}} < f(x_0)$ (ii).
Si on a par exemple (i), soit $y \in]\lim x \to x_0 f(x), f(x_0)[$.
L'existence de $\lim x \to x_0 f(x)$ implique celle d'un réel $u \in I \cap]-\infty, x_0[$, et alors $f(u) \leq \lim_{x\to x_0}$. $f(I)$ étant un intervalle, y devrait en être un élément (ie $y \in f(I)$ donc $]f(u), f(x_0)[\subset I$). Mais pour tout $x < x_0$, on a $f(x) \leq \lim_{x\to x_{0-}} f$, et pour tout $x \geq x_0$, on a $f(x) \geq f(x_0)$. Finalement, on aurait $y \notin f(I)$ d'où la contradiction. □

Théorème : soit I un intervalle réel, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur I. Alors :
(i) $f(I)$ un intervalle réel
(ii) f réalise une bijection de I sur $f(I)$ dont la réciproque f^{-1} est continue, strictement monotone sur $f(I)$, et de même sens de variation que f.

preuve : (i) déjà vu. (ii) Lemme 1 $\to$ bijection de I sur $f(I)$, f^{-1} striccteùe,t monotone, de même monotonie et $f^{-1}(f(I)) = I$, donc Lemme 2 $\to$ continue. □

Théorème : sous les hypothèses du théorème avant, si I est l'intervalle ouvert (resp. fermé, semi-ouvert) d'extrémité a et b, alors $f(I)$ est l'intervalle ouvert (resp. fermé, semi-ouvert) d'extrémité $\lim_a f$, $\lim_b f$

preuve : notons α et β les extrémités de l'intervalle $f(I)$, où $\alpha = inf f(I)$ et $\beta = sup f(I)$ (pris dans $\overline{\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}}$). Envisageons seulement le cas où f croissante sur I. Remarquons que $a \in I$ sisi $\alpha \in f(I)$, avec alors $\alpha = f(a)$, et de même pour b et β.
Lorsque $a \notin I$, on a $\lim_{n\to a} f = \lim_{n\to a+} f$ qui n'est autre que $inf f(I)$, ie α. De même lorsque $b \notin I$, $\lim_{n\to b} f = \lim_{n\to b-} f = \beta$. □

remarques :
(a) Si f est une bijection de D sur E ($D \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$), les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$) sont symétriques par rapport à la droite $(O, \vec{i} + \vec{j})$) dans la direction $\vec{i} - \vec{j}$
(b) Dans le complément, c'est la nature "topologique" qui est conservée, l'aspect "bornologique" ne l'étant pas : par exemple la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-1, 1[$
(c) Si f est continue et strictement monotone sur une partie D qui n'est pas un intervalle réel, alors la bijection réciproque $g : f(D) \to D$ n'est pas nécessairement continue.
(d) Si f est une bijection de I sur $f(I)$, alors f n'est pas nécéssairement strictement monotone sur I. Ainsi : $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ si $x \neq 1$, 1 si $x = 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ($f \circ f = I_d$) mais f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$...
Par contre si l'on rajoute l'hypothèse de continuité sur I, la stricte monotonie est acquise.

Théorème : si I est un intervalle réel et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, alors f est injective sisi f est strictement monotone.

3 Exemples :

3.1 Fonction exponentielle

La fontion $\begin{array}{llll} f : &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc définir sa fonction réciproque :

Définition : la bijection réciproque de ln s'appelle fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

Relation fondamentale : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}$, $\exp(a).\exp(b) = \exp(a + b)$

Propriété : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\exp(r) = (\exp 1)^r$

preuve : montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) =(\exp x)^n$ □

Notation : exp(1) est noté e et $\exp(x)$ est noté e^x

3.2 Fonctions trigonométriques

$f: \begin{array}{ccc} \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est continue et strictement croissante, donc $f^{-1}: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}$ est continue et strictement croissante.

$f: \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ est continue et strictement décroissante, donc $f^{-1}: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [0;\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x \end{array}$ est continue et strictement décroissante.

$f: \begin{array}{ccc}]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$ est continue et strictement croissante, donc $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \arctan x \end{array}$ est continue et strictement croissante.

3.3 Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

Définition : on appelle cosinus hyperbolique (resp. sinus hyperbolique, tangente hyperbolique) la fonction notée ch (resp. sh, th) définie sur $\mathbb{R}$ par : $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (resp. $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $thx = \frac{shx}{chx}$).

$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & chx \end{array}$ est continue et strictement croissante, donc $f^{-1}: \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & Argchx \end{array}$ est continue et strictement croissante.

$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & shx \end{array}$ est continue et strictement croissante, donc $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Argshx \end{array}$ est continue et strictement croissante.

$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1;1[\\ x & \longmapsto & thx \end{array}$ est continue et strictement croissante, donc $f^{-1}: \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Argthx \end{array}$ est continue et strictement croissante.