Exposé 59 : Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.

Prérequis[1] :
-Suite réelle, suite convergente
-Limites de fonctions
Niveau : programme complémentaire.

1 Suites divergentes

Définition : la suite $(u_n)_n$ est divergente dans $\mathbb{R}$ si elle ne converge pas vers un nombre réel, ie : $\forall l \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant N$, tq. $|u_n - l| < \varepsilon$

remarque : (i) une suite non bornée diverge (ex : $((-1)^n.n))_n$ diverge).
(ii) toute suite admettant deux suites extraites ne convergeant pas vers la même limite diverge (ex : $((-1)^n)_n$ diverge car $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

2 Suites divergentes vers l'infini

2.1 Définitions et propriétés

Définition : on dit que $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$ (resp. $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant A$)

remarque : divergentes car non bornées d'après cette définition.

Notation : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Proposition : (i) toute suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est minorée et non majorée (resp. majorée et non minorée).
(ii) si $(u_n)_n$ diverge vers l'infini, alors $(|u_n|)_n$ diverge vers $+\infty$
(iii) toute suite extraite d'une suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est divergente vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

<u>preuve</u> : on passe à la définition... □

Proposition : si $(u_n)_n$ croissante (resp. décroissante), alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longleftrightarrow (u_n)_n$ non majorée (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Longleftrightarrow (u_n)_n$ non minorée)

<u>preuve</u> : "$\Rightarrow$" évident
"$\Leftarrow$" on suppose que $(u_n)_n$ non majorée. Alors $\forall A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $u_N > A$
La croissance de $(u_n)_n$ donne $\forall n > N$, $u_n > A$ ie $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ □

[1]Exposé fortement inspiré de celui de Johann. Tapé par Gwendal Haudebourg, réalisé avec LaTeX. Mis à jour le 17/04/2006

2.2 Opérations algébriques

2.2.1 Somme

Proposition : (i) si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $(v_n)_n$ minorée, alors $(u_n + v_n)_n \longrightarrow +\infty$
(ii) si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $(v_n)_n$ majorée, alors $(u_n + v_n)_n \longrightarrow -\infty$

preuve : (i) soit m un minorant de v_n. Soit $A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A - m$, donc $\forall n \geqslant N \Rightarrow u_n + v_n \geqslant A$ ie $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$ □

Récapitulatif :

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$
$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	?

Exemples : (i) $u_n = n$, $v_n = n$ alors $u_n + v_n \longrightarrow 0$
(ii) $u_n = n$, $v_n = -3n$ alors $u_n + v_n = -2n \longrightarrow -\infty$

2.2.2 Produit

Proposition : soit $(u_n)_n$ une suite de réels, et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda u_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$

preuve : on applique la définition. □

Proposition : (i) si $u_n \to +\infty$ (resp. $u_n \to -\infty$) et si $(v_n)_n$ est minorée par un réel strictement positif, alors $u_n.v_n \to +\infty$ (resp. $u_n.v_n \to -\infty$)
(ii) si $u_n \to +\infty$ (resp. $u_n \to -\infty$) et si $(v_n)_n$ est majorée par un réel strictement négatif, alors $u_n.v_n \to -\infty$ (resp. $u_n.v_n \to +\infty$)

preuve : (i) $m > 0$ minorant de $(v_n)_n$. Soit $A \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geqslant N \Rightarrow u_n > \frac{A}{m} \Rightarrow$
$u_n.v_n > \frac{A}{m}.v_n > \frac{A}{m}.m > A$, ie $\lim_{n\to+\infty} u_n.v_n = +\infty$ □

remarque : le résultat est faux si $(v_n)_n$ minorée par 0 (ou majorée). Il faut bien *strictement* positif (ou *strictement* négatif)
ex : $\begin{cases} u_n = \sqrt{n} \\ v_n = \dfrac{1}{n} \end{cases}$ donc $u_n.v_n \to 0$

Récapitulatif :

$u_n \diagdown v_n$	$+\infty$	$l > 0$	$l < 0$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

2.2.3 Inverse

Proposition : soit $(u_n)_n$ une suite de réels non nuls. Alors $(\frac{1}{n})_n$ a pour limite :

u_n	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\frac{1}{u_n}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

2.2.4 Comparaison

Théorème : soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$, alors :
(i) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
(ii) si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

exemple : $u_n = 3n + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \geqslant v_n = 3n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$

2.2.5 Composition par une application

Théorème : soit f une application définie sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$) et $(u_n)_n$ une suite de I tq. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$). Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$) où $l \in I \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$

preuve : (i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ tq. $\forall x > A, |f(x) - l| < \varepsilon$. De plus $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geqslant N$, $u_n > A$ ie $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $|f(u_n) - l| < \varepsilon$ ie $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = l$
(ii) si $l = +\infty$. Soit $A > 0$, $\exists B > 0$ tq. $\forall x > B$, $f(x) > A$. De plus $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geqslant N$, $u_n > B$, donc $\forall n \geqslant N$, $f(u_n) > A$. □

3 Compléments

Proposition : (i) toute suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est minorée et non majorée (resp. majorée et non minorée).
(ii) si $(u_n)_n$ diverge vers l'infini, alors $(|u_n|)_n$ diverge vers $+\infty$
(iii) toute suite extraite d'une suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est divergente vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

preuve : (i) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$. Soit $A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$, donc u_n minorée par $min(A, B)$ où $B = inf(u_n, n = 0...N-1)$
(ii) déf. car $|u_n| > u_n \geqslant A$
(iii) soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Soit $A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant A$
φ strictement croissante donc $\exists n_k \in \mathbb{N}$ tq. $\varphi(n_k) \geqslant N$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_k \Rightarrow u_{\varphi(n)} \geqslant A$ (car $\varphi(n) \geqslant \varphi(n_k) \geqslant N$ □

preuve (Proposition) : on suppose $u_n \to +\infty$ ie $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $n > N, u_n \geqslant A > 0$
ie $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $n > N$, $\dfrac{1}{u_n} \leqslant A$, ie $\dfrac{1}{u_n} \to 0$
Même chose si $u_n \to 0^+$ ie $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $n > N, \leqslant u_n < A$, donc $\dfrac{1}{u_n} > \dfrac{1}{A}$ □