

# Exposé 58 : Rapidité de convergence d'une suite réelle $(u_n)_n$ vers une limite $l$ . Cas où $|u_n - l|$ est dominé par $n^{-a}$ , par $k^n$ . Exemples. Calculatrice.

**Prérequis**<sup>1</sup> : -Suites, convergence, relation de comparaison  
 -Théorème de récurrence  
 -Fonctions, dvps asymptotiques

**RAPPELS :**

$u_n \sim v_n$  sisi  $\exists h_n$  tq.  $u_n = v_n \cdot h_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1$

$u_n = o(v_n)$  (ou encore  $u_n \ll v_n$ ) sisi  $\exists h_n$  tq.  $u_n = v_n \cdot h_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  (ou :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |u_n| \leq |v_n| \cdot \varepsilon$ ) (cas particulier :  $u_n = o(1)$  ie  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ )

$u_n = \Theta(v_n)$  sisi  $\exists h_n$  tq.  $u_n = v_n \cdot h_n$  et  $h_n$  bornée, (ce que l'on peut aussi écrire  $\exists k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq k|v_n|$ )

**Cadre :** - $(u_n)_n$  convergente vers  $l \in \mathbb{R}$   
 - $(u_n)_n$  est une suite non stationnaire à partir d'un certain rang  
 (donc différente de sa limite, à partir d'un certain rang)

## 1 Un exemple

Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  définies par  $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$  et  $b_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n+1}$

La calculatrice nous indique une convergence vers 2 pour ces deux suites (ce que l'on vérifie théoriquement). On trouve :  $a_{15} = 1,8125, b_{15} = 1,9999$

$$|a_n - 2| = \frac{3}{n+1} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq 2999$$

$$|b_n - 2| = \frac{3}{2^n+1} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow n \geq 12 \text{ ie } (b_n)_n \text{ semble converger plus vite.}$$

**Définition :** soit  $(u_n)_n$  convergeant vers  $l \in \mathbb{R}$ . Les suites  $\varepsilon_n := u_n - l, \xi_n := |u_n - l|$  et  $\lambda_n := \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}$  sont appelées respectivement erreur d'approximation, erreur absolue d'approximation et **erreur relative d'approximation**.

remarque : etudier la rapidité de convergence, ce sera principalement étudier  $\lambda_n := \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}$

## 2 Rapidité de la convergence

### 2.1 Rapidité de la convergence par comparaison

**Définition**<sup>2</sup> : soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites qui convergent vers  $l \in \mathbb{R}$ . On dit que  $(v_n)_n$  converge plus vite que  $(u_n)_n$  vers  $l$  si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - l}{u_n - l} = 0$

<sup>1</sup>L'exposé a été présenté à Bordeaux(1) en 2004 par Armelle, corrigé par M.B., tapé par Gwendal. Réalisé avec L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Mis à jour le 09/06/2007.

## 2.2 Critère intrinsèque de rapidité de convergence

**Définition** : soit  $(a_n)_n$  une suite convergente de limite  $l$ . S'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \lambda$ , alors ce nombre  $\lambda$  s'appelle **coefficient de convergence de la suite**. Dans ce cas :

- Si  $|\lambda| = 1$  : la convergence sera dite "lente"
- Si  $0 < |\lambda| < 1$  : la convergence sera dite "géométrique"
- Si  $|\lambda| = 0$  : la convergence sera dite "rapide"

**remarque** :  $\lambda$  peut ne pas exister :

soit  $(u_n)_n$  définie par  $u_{2n} = \frac{1}{n}$  et  $u_{2n+1} = \frac{2}{n}$ .  $(u_n)_n$  décroissante et minorée par 0, donc convergente vers  $l$ . De plus, deux de ses suite extraites convergent vers 0, donc  $l = 0$ .

De plus  $\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \frac{u_{2k+1} - l}{u_{2k} - l} = 2 \rightarrow 2$ , si  $n$  pair,  $\frac{u_{2k+2} - l}{u_{2k+1} - l} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ , si  $n$  impair, donc n'as pas de limite, donc  $\lambda$  n'existe pas.

**Proposition** : lorsqu'il existe,  $|\lambda| \leq 1$

preuve : supposons que  $\lambda$  existe et  $|\lambda| > 1$ .

$\lambda_n \rightarrow \lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$ , donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, ||\lambda_n| - |\lambda|| < |\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$ , donc

$-\varepsilon < |\lambda_n| - |\lambda| < \varepsilon$ , d'où  $-\varepsilon + |\lambda| < |\lambda_n| < \varepsilon + |\lambda|$ .

Or  $|\lambda| > 1$  par hypothèse, donc il existe  $k > 1$  tq  $|\lambda| - \varepsilon = k > 1$

Donc  $|\lambda_n| > |\lambda| - \varepsilon > 1$ ; or  $\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = \lambda_n$ , donc  $\exists N, \forall n \geq N, |\lambda_n| = \left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right| > k > 1$ , donc  $|u_{n+1} - l| > k|u_n - l|$

$> k^2|u_{n-1} - l| > \dots > k^{n-N+1}|u_n - l|$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^{n-N+1} = +\infty$  car  $k > 1$ , donc  $|u_n - l| \rightarrow +\infty$ , et  $(|u_n|)_n$  diverge (donc  $(u_n)_n$  diverge), d'où la

contradiction. □

**Proposition** : soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  deux suites convergentes vers  $l$  et  $l'$ , de coefficients de convergence respectifs  $\lambda_u$  et  $\lambda_v$ . Alors :  $[(v_n)_n \text{ converge plus vite vers } l' \text{ que } (u_n)_n \text{ vers } l] \Rightarrow [|\lambda_v| \leq |\lambda_u|]$

Cette proposition permet de faire le lien entre le critère intrinsèque de vitesse de convergence  $\lambda$ , et la comparaison de vitesse de convergence de deux suites. On utilise souvent les cas  $l = l'$

exemples :

$\frac{a_{n+1} - 2}{a_n - 2} = \frac{n+1}{n+2} \rightarrow 1$  donc convergence lente

$\frac{b_{n+1} - 2}{b_n - 2} = \frac{2^n + 1}{2 \cdot 2^n + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$  donc convergence géométrique

-soit  $c_n = \frac{1}{n!}$ , alors  $\frac{c_{n+1} - 0}{c_n - 0} \rightarrow 0$  donc convergence rapide

-soit  $d_n = \sum_{k=1}^n$ , alors  $\frac{d_{n+1} - e}{d_n - e} \rightarrow 0$  donc convergence rapide

-soit  $(u_n)_n$  une suite d'Héron d'Alexandrie :  $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ . Alors  $\frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}) - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$

$= \dots = \frac{u_n - \sqrt{2}}{2u_n} \rightarrow 0$  donc convergence rapide (on a besoin de savoir que  $u_n \rightarrow \sqrt{2}$ , et que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \sqrt{2}$ )

## 3 Comparaison à quelques suites classiques

On suppose que  $(u_n)_n \rightarrow l$ , et que  $\lambda$  définit ci-dessus existe. On remarquera que le choix a été fait de travailler par équivalence, et non pas par domination (comme pourtant donner dans le titre de l'exposé). En effet, l'information par les équivalence sur la vitesse de convergence des suites est beaucoup plus intéressante : si  $|u_n - l| \leq \frac{1}{n}$ , la suite  $(u_n)_n$  peut-être lente, géométrique ou rapide (elle est "au moins" lente, "au plus" rapide, ce qui n'est pas très pertinent).

**Proposition** : soient  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  convergentes vers  $l$  et  $l'$ , de coefficients de convergence  $\lambda_u$  et  $\lambda_v$ . Alors :  $[|u_n - l| \sim |v_n - l'|] \Rightarrow [|\lambda_u| = |\lambda_v|]$  (ie même coefficient de convergence, ie même ordre de vitesse de convergence)

<sup>2</sup> autre définition possible :  $v_n - l = o(u_n - l)$  pour  $n$  assez grand

On utilise cette proposition (pour ce qui suit), en particulier pour  $l' = 0$

**Théorème** : Les suites  $(u_n)_n$  de type  $|u_n - l| \sim \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ,  $\alpha > 0$  sont de **convergences lente** :

$$\text{soit } v_n = \frac{1}{n^\alpha}, v_n \rightarrow 0, \lambda_n = \frac{v_{n+1} - 0}{v_n - 0} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \rightarrow 1$$

exemple :  $|a_n - 2| = \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{n} \sim \left(\frac{1}{n}\right)$

**Théorème** : Les suites  $(u_n)_n$  de type  $|u_n - l| \sim (k^n)$ ,  $|k| < 1$  sont de **convergences géométrique** :

$$\text{soit } v_n = k^n, v_n \rightarrow 0, \lambda_n = \frac{k^{n+1}}{k^n} \rightarrow k$$

exemple :  $|b_n - 2| = \frac{3}{2^n + 1} \sim \left(\frac{1}{2^n}\right)$

**Théorème** : Les suites  $(u_n)_n$  de type  $|u_n - l| \sim (k^{r^n})$ ,  $|k| < 1$  et  $r > 1$  sont de **convergences rapide** :

$$\text{soit } v_n = k^{r^n}, v_n \rightarrow 0, \lambda_n = \frac{k^{r^{n+1}}}{k^{r^n}} = \frac{(k^{r^n})^r}{k^{r^n}} = (k^{r^n})^{r-1} \rightarrow 0$$

exemple : Suite d'Héron d'Alexandrie :  $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$

$$|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - \sqrt{2})^2 \text{ et } |u_0 - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}, \text{ par récurrence } |u_n - \sqrt{2}| \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

$$u_8 = \sqrt{2} \text{ à } 10^{-100} \text{ près.}$$

(on parle même de convergence bolide)

## 4 Accélération de la convergence

**Théorème** (MÉTHODE DE ROMBERG) : soit  $(u_n)_n$  une suite convergente de limite  $l$ , tq.  $\lambda$  existe, et soit connu,  $\lambda \neq 1$ .

Alors la suite de terme général  $v_n := \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1 - \lambda}$  converge plus vite que  $(u_n)_n$  vers la même limite  $l$ .

remarque : lorsque  $\lambda = -1$ , il s'agit de la "méthode de la moyenne" Et si  $\lambda = 0$ ? On a alors  $v_n = u_{n+1}$  (aucun intérêt, d'accélération de convergence d'un seul "pas"); ce procédé de convergence ne sera donc utilisé en pratique que lorsque  $(u_n)_n$  sera géométrique (le cas  $\lambda = 1$  étant exclu (suite alors non définie)).

preuve :  $\frac{v_n - l}{u_n - l} = \frac{u_{n+1} - l - \lambda(u_n - l)}{(1 - \lambda)(u_n - l)} = \frac{1}{1 - \lambda} \cdot \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} - \frac{\lambda}{1 - \lambda}$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n - l}{u_n - l} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - \lambda u_n - l = \lambda$ . Ainsi la suite  $(v_n)_n$  converge vers  $l$ , plus rapidement que  $(u_n)_n$ . □

**remarque** : cette méthode nécessite de connaître  $\lambda$

exemple :  $b_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n + 1}, B_n = \frac{4 \cdot 4^n + 6 \cdot 2^n - 1}{2 \cdot 4^n + 5 \cdot 2^n + 1}, \lambda_1 = \frac{1}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{4}$

$$|b_n - 2| \sim \left(\frac{1}{2^n}\right), |B_n - 2| \sim \left(\frac{1}{4^n}\right)$$

**Théorème** (MÉTHODE/PROCÉDÉ D'AITKEN) : soit  $(u_n)_n$  une suite convergente de limite  $l$ , tq.  $\lambda \neq 1$ . Alors la suite de

terme général  $v_{n+1} := u_n - \frac{(u_{n+1} - u_n)^2}{u_n + u_{n+2} - 2u_{n+1}}$  converge plus vite que  $(u_n)_n$  vers la même limite  $l$ .

remarque : en notant  $\Delta(u_n) = u_{n+1} - u_n$ , et  $\Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n)$ , en posant  $w_n := \Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ , on a  $\Delta^2 u_n = w_{n+1} - w_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$ , d'où la notation plus simple :

$$v_{n+1} = u_n - \frac{(\Delta u_n)^2}{\Delta^2 u_n}$$

## 5 Compléments

$-u_n - l = e_n$  est l'erreur d'approximation,  $|u_n - l| = |e_n|$  est l'erreur absolue. Ce qui est important, c'est l'erreur relative  $\lambda_n = \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}$  : erreur relative = quotient des erreurs d'approximations =  $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ .

-on se place dans le cas où les suites convergent vers  $l$ , avec  $u_n \neq l$  à partir d'un certain rang.

-Attention à l'erreur classique :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right| \neq \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} \right|$

En effet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \right|$  peut exister sans que  $\left| \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} \right|$  n'existe.

exemple :  $u_n = k^n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ ,  $0 < k < 1$

$\left| \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n+1}} \right| = k \left| \frac{k+1}{k-1} \right|$  si  $n$  pair,  $k \left| \frac{k-1}{k+1} \right|$  si  $n$  impair

-On met des  $\sim$  à la place de  $\Theta$  (plus fort qu'une majoration)

-Convergence lente : suites de Riemann par majoration-minoration des suites télescopiques

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = u_n \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} \text{ d'où } \frac{\pi^2}{6} - u_n \sim \frac{1}{n}$$

### 5.1 ancienne preuve, pour montrer que $\lambda > 1$ est absurde

preuve : supposons que  $\lambda$  existe et  $\lambda > 1$ .

$\lambda_n \rightarrow \lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |\lambda_n - \lambda| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \lambda - \varepsilon < \lambda_n < \lambda + \varepsilon$  donc il existe  $k \geq 1$  tq  $\lambda - \varepsilon = k \geq 1$  (car par hypothèse,  $\lambda > 1$ )

donc  $\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} > |k| = k$ , d'où  $|u_{n+1} - l| > k|u_n - l|$ , et par suite :

$$|u_{n+1} - l| > k|(u_n - l)| \geq |u_n - l| \text{ car } k > 1$$

$$|u_n - l| > k|(u_{n-1} - l)| \geq |u_{n-1} - l|$$

.....

$$|u_n - l| > k|(u_N - l)| \geq |u_N - l|$$

donc  $|u_n - l| > k|(u_N - l)|$ ; or  $|u_n - l| < |u_N - l|$  car  $n \geq N$  et  $u_n \rightarrow l$ , d'où la contradiction. □

### 5.2 Sources

Cours d'analyse pour la licence et le capes, Jean-Etienne Rombaldi (<http://perso.orange.fr/math.rombaldi/>)

On y trouvera des exemples, etc., et la preuve du procédé d'Aitken.