Exposé 57 : Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Comparaison de suites entre elles.

Prérequis[1] :
-Inégalité triangulaire
-Axiome de la borne supérieure : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure
-Notion de suites majorées, bornées, croissantes, décroissantes...
-Continuité
Cadre : nous considérons des suites réelles dans les énoncés suivants. Ces énoncés sont encore valable pour des suites définies à partir d'un certain rang.
Rappel : suite réelle : $u : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} \subset \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) =: u_n \end{array}$ à partir d'un certain rang N_0 : $u : \begin{array}{ccc} \{n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0\} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u_n \end{array}$
Niveau : programme complémentaire.

1 Suites convergentes

1.1 Définitions

Définition : une suite réelle $(u_n)_n$ est dite convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tq. $\forall \varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$ (1)

Proposition (UNICITÉ DE LA LIMITE) : si $(u_n)_n$ est une suite convergente, alors il existe un unique réel l qui satisfait (1).

preuve : on suppose que $(u_n)_n$ converge, et l, l' satisfaisants (1) avec $l \neq l'$. Alors :

$$\forall \varepsilon, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1, |u_n - l| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_2, |u_n - l'| < \varepsilon$$

Soit $N = max(N_1, N_2)$. Alors $\forall n > N$, $|l - l'| \leqslant |u_n - l| + |u_n - l'|$. Donc $\forall \varepsilon$, $|l - l'| < 2.\varepsilon$ (contradiction, en posant $\varepsilon = \dfrac{|l - l'|}{4}$ par exemple). □

Notation : si un tel nombre l existe, on note $l = \lim_{n\to\infty} u_n$ et on dit que $(u_n)_n$ converge vers l, que l est la limite de $(u_n)_n$ (et que $(u_n)_n$ admet une limite l).

exemples :
– les suites stationnaires convergent
– $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0

1.2 Propriétés

Proposition 1 : toute suite convergente est bornée.

Proposition 2 : si $(u_n)_n$ converge vers l, alors $(|u_n|)_n$ converge vers $|l|$ (la réciproque est vraie sisi $l = 0$).

Remarque : la réciproque de la prop. 1 est fausse (exemple : $(-1)^n$ bornée mais non convergente).

[1] Exposé fortement inspiré de celui de Johann. Tapé par Gwendal, réalisé avec LaTeX. Mise à jour le 02/06/2007

Définition : soit $(u_n)_n$ une suite. On dit que $(v_n)_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$ s'il existe $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \varphi(n) \end{array}$ strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$

Exemple : $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont des suites extraites de $(u_n)_n$

Proposition 3 : $(u_n)_n$ converge vers $l \Longleftrightarrow$ toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers l.

Remarque : cela fournit un critère de non convergence pour certaines suites. Exemple : $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, car $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1, \forall n \in \mathbb{N}$ (donc convergent vers 1 et -1 respectivement).

Proposition 4 : si $(u_n)_n$ est une suite croissante et majorée, alors elle converge (respectivement une suite décroissante et minorée converge).

exemple : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

preuve : supposons que $(u_n)_n$ soit croissante et majorée. Soit $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On pose $l = supA$. Par définition de la borne supérieure, on a donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \in A$ et $l - \varepsilon < u_N \leqslant l < l + \varepsilon$. Or $(u_n)_n$ croissante, donc $\forall n \geqslant N, l - \varepsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant l < l + \varepsilon$
ie $(u_n)_n$ converge vers l. □

Définition : on dit que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes si :
- $(u_n)_n$ croissante
- $(v_n)_n$ décroissante
- $\lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$

Proposition 5 : deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Exemple : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

2 Opérations algébriques

Théorème : soit $k \in \mathbb{R}$, $(u_n)_n$ qui converge vers l et $(v_n)_n$ qui converge vers l'. Alors :
1. $(u_n + v_n)_n$ converge vers $l + l'$
2. $(u_n.v_n)_n$ converge vers $l.l'$
3. $(k.u_n)_n$ converge vers $k.l$
4. si $l \neq 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n > N, u_n \neq 0$, et alors $\frac{1}{u_n}$ converge vers $\frac{1}{l}$ et $\frac{v_n}{u_n}$ converge vers $\frac{l'}{l}$

preuve : (1) et (3) évidents.
(2) soit $\varepsilon > 0$, $|u_n.v_n - l.l'| = |(u_n - l).v_n + l.(v_n - l')| \leqslant |u_n - l|.|v_n| + |l|.|v_n - l'|$
Or $(v_n)_n$ converge donc $(v_n)_n$ bornée, et $\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tq. $\forall n > N, |v_n| < M$. De plus $(u_n)_n$ converge vers l, donc en posant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M}$: $\exists N_1, \forall n > N_1, |u_n - l| < \varepsilon'$. De même, $(v_n)_n$ converge vers l', donc en posant $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{l}$: $\exists N_2, \forall n > N_2, |v_n - l'| < \varepsilon''$.
Donc $\forall n > max(N, N_1, N_2)$, $|u_n.v_n - l.l'| \leqslant \varepsilon'.M + |l|.\varepsilon'' = 2\varepsilon$
(4) $|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l}| = |\frac{l - v_n}{l.v_n}| = \frac{|v_n - l|}{l.|v_n|}$. Or $(v_n)_n$ bornée, donc $\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tq. $\forall n > N, |v_n| < M$, et $(v_n)_n$ converge vers l, donc en posant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|l|.M}$, on a $\frac{|l - v_n|}{|l|.|v_n|} < \varepsilon'$ □

3 Composition avec une application continue

Théorème : soit $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de A. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = l, l \in A$, et si f continue en l, alors $(f(u_n))_n$ converge vers $f(l)$

preuve : soit $\varepsilon > 0$, alors par continuité de f en l, $\exists \eta > 0$ tq. $\forall x \in A, |x - l| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(l)| < \varepsilon$. Or $\exists N$ tq. $\forall n > N, |u_n - l| < \eta$ ie $|f(u_n) - f(l)| < \varepsilon$ □

Remarques :
-ce résultat sert dans l'étude des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ -la condition de continuité en l suffit, il n'est pas nécessaire de prendre f continue sur A tout entier

4 Comparaison de suites entres elles

Soient trois suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$

Théorème : si $(u_n)_n$ converge vers l, $(v_n)_n$ vers l', et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n > N, u_n \leqslant v_n$, alors $l \leqslant l'$

Théorème (DES GENDARMES) : si $(u_n)_n$ converge vers l, et $(w_n)_n$ vers l, et si $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n > \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $(v_n)_n$ converge vers l.

exemple : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$

Corollaire : si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ et si $\exists N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n > \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant v_n$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$

5 Compléments

5.1 Preuves

PROP.1 : **Toute suite convergente est bornée**

preuve (PROP.1) : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N, |u_n - l| < \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N, l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$, et pour $n < N$, $min_{k=0...n}(u_k) \leqslant u_n \leqslant max_{k=0...n}(u_k)$ □

PROP.2 : **si $(u_n)_n$ converge vers l, alors $(|u_n|)_n$ converge vers $|l|$**

preuve (PROP.2) : $||u_n| - |l|| \leqslant |u_n - l|$ (après on applique la définition de la convergence à $(u_n)_n$) □

PROP.3 : $(u_n)_n$ **converge vers l sisi toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers l**

preuve (PROP.3) : on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tq. $\forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Donc $\exists n_k$ tq. $\varphi(n_k) > N$, donc $\forall n > N, \varphi(n) > \varphi(n_k) > N$ d'où $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$ □

PROP.5 : **Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite**

preuve (PROP.5) : on montre d'abord le Lemme : si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, alors $u_n \leqslant v_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
$v_{n+1} - u_{n+1} = (v_{n+1} - v_n) + (v_n - u_n) + (u_n - u_{n+1})$ or $(v_{n+1} - v_n) \leqslant 0$ car $(v_n)_n$ décroissante ; de même $(u_n - u_{n+1}) \leqslant 0$.
Donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n$ donc la suite $(v_n - u_n)_n$ est décroissante qui tend vers 0, ie $(v_n - u_n) \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$
De plus, $(u_n)_n$ est croissante et majorée par v_0, $(v_n)_n$ est décroissante et minorée par u_0 (Lemme), donc $(u_n)_n$ converge vers l, $(v_n)_n$ converge vers l'. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ie $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, ie $l = l'$ □

Théorème : si $(u_n)_n$ converge vers l, $(v_n)_n$ vers l', et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n > N, u_n \leqslant v_n$, alors $l \leqslant l'$

preuve (THÉORÈME) : par l'absurde, on pose $w_n = v_n - u_n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l - l'$, et $\forall n \geqslant N_1, w_n \geqslant 0$. On suppose que $l' - l < 0$. $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tq. $n > N_2$, $w_n - (l' - l) \leqslant \dfrac{l - l'}{2}$ (en posant $\varepsilon = \dfrac{l - l'}{2}$).
Soit $N = max(N_1, N_2)$. $\forall n \geqslant N$, $0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{l' - l}{2} < 0$ (contradiction). Donc $l' - l \geqslant 0$ □

preuve (TH. DES GENDARMES) : soit $\varepsilon > 0$. $\forall n \geqslant N$, $u_n - l \leqslant v_n - l \leqslant w_n - l$. $\exists N_1, n > N_1, -\varepsilon \leqslant u_n - l \leqslant \varepsilon$; $\exists N_2$, $n > N_2$, $-\varepsilon \leqslant w_n - l \leqslant \varepsilon$. On pose $N' = max(N, N_1, N_2)$, $-\varepsilon \leqslant v_n - l \leqslant \varepsilon$ □

5.2 Exercices

5.2.1 Exercice 1 : montrer que $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n > N, |\frac{1}{n}| < \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$. En posant $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$, pour $n > N$, on a $|\frac{1}{n}| < \dfrac{1}{E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1} < \dfrac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, ce que l'on voulait.

5.2.2 Exercice 2 : montrez que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ sont adjacentes.

La suite $(u_n)_n$ est clairement croissante, et $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n.n!} = 0$

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$

$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$, donc $(v_n)_n$ est décroissante.

5.2.3 Exercice 3 : montrer que $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2})_n$ converge.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante.

$k \in \mathbb{N}^+$, $k^2 = k(k-1) + k$, donc $k^2 \geqslant k(k-1)$, donc $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$, donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$, donc $(u_n)_n$ est majorée par 2, donc cv.

5.2.4 Exercice 4 : montrer que $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2})_n$ converge vers 0.

$\forall k \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \frac{1}{n^2+1}$, donc $0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n}$

Donc par le théorême des gendarmes, $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2})_n$ converge vers 0.

5.2.5 Exercice 5 : montrer que $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n^2})$ converge.

$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n^2})$. On montre facilement que $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

En posant $x = \frac{k}{n^2}$, et en sommant : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}.(\frac{k}{n^2})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n^2}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = n^2.(\frac{n(n+1)}{2}) = \frac{n(n+1)}{2n^2} \longrightarrow \frac{1}{2}$, et $-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n^2})^2 = -\frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $0 \leqslant \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant \frac{1}{n^2}$

Donc $-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n^2})^2 \longrightarrow 0$, donc $\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n^2}) \longrightarrow \frac{1}{2}$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}}$