Exposé 55 : Exemples de représentation paramétrique des coniques; construction de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.

Prérequis[1] :
-Equations réduites d'une conique[1]
-Tangente à une courbe paramétrée
-Propriétés bifocales de l'ellipse et de l'hyperbole

Cadre de la leçon
Soit $\overrightarrow{P}$ plan affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormal direct.

1 Représentations paramétriques des coniques ; tangentes en un point

1.1 Parabole

1.1.1 Equation réduite

Une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ admet pour équation réduite $y^2 = 2px$ dans le repère orthonormé d'origine O milieu de $[KF]$ (K projection orthogonale de F sur $\mathcal{D}$) tel que : $\overrightarrow{KF} = p\vec{i}$, $(p > 0)$

1.1.2 Une paramétrisation associée

Théorème
A cette équation réduite, on peut donc associer la paramétrisation : $x(t) = \frac{t^2}{2p}, y(t) = t, t \in \mathbb{R}$

preuve
On a : $M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{y^2}{2p}\vec{i} + y\vec{j}$, d'où le résultat en prenant $y = t$ ($M(t) = (\frac{t^2}{2p}, t)$).

1.1.3 Tangente à la parabole

Corollaire
La parabole $\mathcal{P}$ admet en tout point une tangente. Si $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$, sa tangente en M_0 , notée $\mathcal{T}_{M_0}$, a pour équation cartésienne (dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$) : $y.y_0 = p(x + x_0)$

preuve
Soit $M(t)$ un point quelconque de la parabole. L'existence de la tangente au point $M(t)$ est assurée par la dérivabilité de la fonction $t \to \overrightarrow{OM}(t) = (\frac{t^2}{2p}, t)$.

La tangente au point $M(x_0, y_0)$ admet pour vecteur directeur $\frac{d\overrightarrow{OM_0}}{dt}(t) = \vec{u_0}(t_0)\left(\frac{t_0}{p}, 1\right)$ (et $p > 0$ donc le vecteur directeur n'est jamais nul)

[1]L'exposé a été présenté (et tapé) à Bordeaux(1) le 24/01/2005 par Gwendal Haudebourg, et a été corrigé par M. P. Mis à jour le 06/02/2006

$M \in \mathcal{T}_{M_0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = k\overrightarrow{u_0}$
$M \in \mathcal{T}_{M_0} \Longleftrightarrow x - x_0 = \frac{kt_0}{p}$ et $y - y_0 = k$
$\Longrightarrow (x - x_0)p = (y - y_0)t_0$ or $y_0 = t_0 \Longrightarrow px - px_0 = -y_0^2 + y_0y = -2px_0 + y_0y$
$\Longrightarrow px + px_0 = y_0.y \Longrightarrow y.y_0 = p(x_0 + x)$

1.2 Ellipse

1.2.1 Equation réduite

A toute ellipse $\mathcal{E}$, on peut associer un repère orthonormal $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans lequel l'ellipse admet une équation réduite de la forme : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (où l'on peut supposer $0 \leq b \leq a$).
$\mathcal{R}$ admet pour origine le centre de l'ellipse, pour axe $x'x$ le grand axe de l'ellipse, et pour axe yy' le petit axe de l'ellipse.

1.2.2 Une paramétrisation associée

Théorème
A cette équation réduite, on peut donc associer la paramétrisation :
$x(t) = a\cos(t), y(t) = b\sin(t), t \in [0, 2\pi[$

preuve
D'après les propriétés des fonctions cos et sin, à tout couple de réel (u, v) vérifiant $u^2 + v^2 = 1$, on peut faire correspondre un réel t, défini à $2k\pi$ près tel que :
$u = cos(t), v = sin(t)$. Ainsi :
$M(x, y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow \exists t \in [0, 2\pi[$ tel que $\frac{x}{a} = cos(t), \frac{y}{b} = sin(t)$. On obtient ainsi la paramétrisation associée $x(t) = a\cos(t), y(t) = b\sin(t), t \in [0, 2\pi[$.
Cas particulier : si $a = b = r$, $x(t) = rcos(t), y(t) = rsin(t), t \in [0, 2\pi[$ est une représentation paramétrique du cercle de centre $O(0, 0)$, de rayon r

1.2.3 Interprétation graphique

On appelle cercles principaux de l'ellipse $\mathcal{E}$ les deux cercle centrés en O, de rayon a et b notés respectivement C_a et C_b.
L'ellipse $\mathcal{E}$ définie par la paramétrisation $\frac{x}{a} = cos(t), \frac{y}{b} = sin(t), t \in [0, 2\pi[$ peut être considérée comme image d'un de ses cercles principaux par une affinité orthogonale :
-image de C_a par l'affinité orthogonale d'axe $x'x$ de rapport $\frac{b}{a}$
-image de C_b par l'affinité orthogonale d'axe $y'y$ de rapport $\frac{a}{b}$

Signalons aussi une méthode pratique de construction de l'ellipse ($a > b$) que l'on peut justifier à l'aide de cette paramétrisation :
on utilise une bande de papier de longueur a, d'extrémités A et M, B étant le point de $[AM]$ tel que $BM = b$.
on déplace cette bande de papier de façon à ce que A et B demeurent repsectivement sur les axes $(x'x)$ et $(y'y)$, et l'on a alors M qui décrit l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
En effet :
$cos(t) = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{x_0}{a}$, $sin(t) = \dfrac{MN}{BM} = \dfrac{y_0}{b}$

1.2.4 Tangente à l'ellipse

Corollaire
L'ellipse $\mathcal{E}$ admet en tout point $M(x_0, y_0)$ une tangente notée $\mathcal{T}_{M_0}$, qui a pour équation cartésienne
$\dfrac{x.x_0}{a^2} + \dfrac{y.y_0}{b^2} = 1$

preuve
Soit $M(t)$ un point quelconque de l'ellipse $\mathcal{E}$. L'existence de la tangente au point $M(t)$ est assurée par la dérivabilité de la fonction $t \to \overrightarrow{OM}(t) = (acos(t), bsin(t))$
La tangente en $M_0(x_0, y_0)$ admet pour vecteur directeur $d\dfrac{\overrightarrow{OM_0}(t)}{dt} = \overrightarrow{u(t_0)}(-a\sin(t_0), b\cos(t_0))$ (qui n'est jamais nul).
Donc $M \in \mathcal{T}_{M_0} \iff \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{M_0M} = k\vec{u}$
$\iff \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $x - x_0 = -ka\sin(t_0), y - y_0 = -ka\cos(t_0)$
or $x_0 = a\cos(t_0), y_0 = b\sin(t_0)$ donc $\iff \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $x - x_0 = \frac{-ka}{b}y_0, y - y_0 = \frac{-kb}{a}x_0$
$\iff \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $k = \frac{(y-y_0)a}{bx_0}y_0$, $x - x_0 = \frac{-ka}{b}y_0$
$\Rightarrow x - x_0 = \frac{(y-y_0)a^2}{bx_0}y_0$, $x_0 \neq 0 \Rightarrow b_2x_0x - b^2x_0^2 = y_0^2a^2 - y_0ya^2 \Rightarrow b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + y^2y_0^2$
$\Rightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ (car $M_0 \in \mathcal{E}$)
(Si $x_0 = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $x = -ka\sin(t_0)$. Or $x_0 = a\cos(t_0), a \neq 0 \Rightarrow cos(t_0) = 0 \Rightarrow y - y_0 = 0$
$\Rightarrow y = y_0$)

1.3 Hyperbole

1.3.1 Equation réduite

A toute hyperbole $\mathcal{H}$, on peut associer un repère orthonormé $\mathcal{R}$ dans lequel l'hyperbole admet une équation réduite de la forme : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (où l'on peut supposer $a > 0$ et $b > 0$.
Le repère $\mathcal{R}$ admet pour origine le centre de l'hyperbole, pour axe $x'x$ l'axe focal de l'hyperbole.

1.3.2 Paramétrisations associées

Théorème
A l'équation précédente, on peut associer la paramétrisation :
$x(t) = \frac{a}{cos(t)}, y(t) = btan(t), t \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

preuve
L'application $t \longmapsto \tan t$ définit une bijection de $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. De plus, $\forall t \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
$\frac{1}{(\cos t)^2} - (\tan t)^2 = 1$, et $t \longmapsto \frac{1}{\cos t}$ fonction paire sur $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, définit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dans $[1, \infty[$.
Ainsi, $\forall M \in \mathcal{H}$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \exists t \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que : $\frac{x}{a} = \pm\frac{1}{cost}$ et $\frac{y}{b} = \tan t$
Réciproquement, tout point $M(t)$ de coordonnées $(\pm\frac{a}{cost}, b\tan t)$ où $t \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ appartient à l'hyperbole.

1.3.3 Tangente à l'hyperbole

Corollaire
L'hyperbole $\mathcal{H}$ admet en tout point une tangente. Si $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$, sa tangente en M_0 , notée $\mathcal{T}_{M_0}$, a pour équation cartésienne (dans $(o, \vec{i}, \vec{j})$) : $\frac{x.x_0}{a^2} - \frac{y.y_0}{b^2} = 1$

preuve
Soit $M(t)$ un point quelconque de l'hyperbole. L'existence de la tangente au point $M(t)$ est assurée par la dérivabilité de la fonction $t \to \overrightarrow{OM} = (\frac{a}{cos(t)}, btan(t))$.

La tangente au point $M(x_0, y_0)$ admet pour vecteur directeur
$\dfrac{d\overrightarrow{OM_0}}{dt}(t) = \overrightarrow{u_0}(t_0)(\dfrac{a\tan t_0}{\cos t_0}, \dfrac{b}{(\cos t_0)^2}) = (\dfrac{x_0.y_0}{b}, \dfrac{b.x_0^2}{a^2})$
$M \in \mathcal{T}_{M_0} \iff \overrightarrow{M_0M} = k\overrightarrow{u_0}$
$M \in \mathcal{T}_{M_0} \iff x - x_0 = \frac{k.a.y_0}{b.cost_0}$ et $y - y_0 = \frac{k.b.x_0}{cost_0}$
$M \in \mathcal{T}_{M_0} \iff x - x_0 = \frac{k.x_0.y_0}{b}$ et $y - y_0 = \frac{k.b.x_0^2}{a^2}$
$M \in \mathcal{T}_{M_0} \iff x - x_0 = \frac{k.x_0.y_0}{b}$ et $\frac{a^2(y-y_0)}{b.x_0^2} = k$
$\implies x - x_0 = \frac{a^2(y-y_0)x_0.y_0}{b^2.x_0^2} \implies b^2.x_0.x - a^2.y.y_0 = b.x_0^2 - a^2.y_0^2 \implies \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$

2 Constructions géométriques de la tangente et de la normale en un point

2.1 Avec la définition monofocale commune aux trois types de coniques

Théorème
Soit C une conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, et M un point de C non situé sur l'axe focal. La tangente à C en M (notée $\mathcal{T}_M$)coupe $\mathcal{D}$ en un point T, tel que le triangle MFT soit rectangle en F (ie $(FM) \perp (FT)$).

preuve
Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, soit $F(c, 0)$, $T(0, r)$, $\overrightarrow{u}(x', y')$, $x' \neq 0$ vecteur directeur de la tangente.
$\overrightarrow{TM_0} = k\overrightarrow{u} \Leftrightarrow (x_0 = k'x'_0, y_0 - r = ky'_0) \Leftrightarrow (k = \frac{x_0}{x'_0}, r = -\frac{x_0.y'_0}{x'_0}) + y_0)$
$MF^2 = e^2.MH^2 \Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = e^2.x^2$. On dérive par rapport à t :
$y'y + (x - c)x' = e^2.x.x'$, d'où $yy' = e^2xx' - x'(x - c)$
$\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FT} = (x_0 - c).(-c) + y_0r = (x_0 - c)(-c) + y_0(y_0 - \frac{x_0}{x'}y') = ... = -2cx_0 + c^2 + x_0^2 - x_0^2 - c^2 + 2x_0c = 0.$
Donc $(FM) \perp (FT)$

2.2 D'après la définition bifocale des coniques à centre (ie ellipse, hyperbole)

2.2.1 Cas de l'ellipse

Théorème
La tangente en un point M d'une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F, F' est la bissectrice extérieure issue de M du triangle MFF', et la normale est la bissectrice intérieure.

preuve
Notons $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{FM}}{FM}$ et $\overrightarrow{u'} = \frac{\overrightarrow{F'M}}{FM}$ (ainsi, on a : $MF = \overrightarrow{FM}.\overrightarrow{u}$ et $MF' = \overrightarrow{F'M}.\overrightarrow{u'}$. Or
$M \in \mathcal{E} \Rightarrow FM + F'M = 2a$. Donc en dérivant :
$\dfrac{d\overrightarrow{FM}}{dt}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{FM}.\dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{F'M}}{dt}.\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{F'M}.\dfrac{d\overrightarrow{u'}}{dt} = 0$
Comme $\overrightarrow{FM}.\dfrac{d\overrightarrow{u}}{dt} = \overrightarrow{F'M}.\dfrac{d\overrightarrow{u'}}{dt} = 0$, on en déduit $\dfrac{d\overrightarrow{FM}}{dt}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}) = 0$, comme $\dfrac{d\overrightarrow{FM}}{dt}$ dirige la tangente en M, et $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}$ dirige la bissectrice intérieure issue de M du triangle MFF', on a le résultat énoncé

2.2.2 Cas de l'hyperbole

Théorème
La tangente en un point M d'une hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers F, F' est la bissectrice intérieure issue de M du triangle MFF', et la normale est la bissectrice extérieure.

preuve
Idem avec $\mathcal{H} = \{M/|MF - MF'| = 2a\}$

3 Constructions particulières des tangentes

3.1 Parabole $\mathcal{P}$

Le théorème suivant nous donne une méthode pour construire la tangente (et la normale) en un point M de la parabole.

Théorème
Soit $M \in \mathcal{P}$, $H = proj_{\perp,\mathcal{P}}(M)$. Alors la tangente en M à $\mathcal{P}$ est la médiatrice de $[FM]$, et la normale en M est la parallèle à (FH) passant par M.

preuve
Un vecteur directeur de la tangente en $M(t) \in \mathcal{P}$ est $\overrightarrow{u}(\frac{t}{p}, 1)$, $H(-\frac{p}{2}, t)$, $F(\frac{p}{2}, 0)$ On a donc :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{HF} = (\frac{t}{p}, 1).(p, -t) = 0$, d'où $(\mathcal{T}_M) \perp (FH)$. De plus, par définition de la parabole, on a $HM = FM$, donc $M \in med[HF]$, d'où le résultat.

3.2 Ellipse $\mathcal{E}$

Théorème
Soit $M \in \mathcal{E}$ distinct des sommets. Alors la tangente à $\mathcal{C}(O, a)$ en $P \in \mathcal{C}(O, a)$ de même abscisse que M coupe l'axe focal en m tel que $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} = (Mm)$.

preuve
On a $P(a\cos(t), a\sin(t))$, $M(a\cos(t), b\sin(t))$, $m(k, 0)$, $\overrightarrow{OP} = (a\cos(t), a\sin(t))$,
$\overrightarrow{Pm} = (k - a\cos(t), -a\sin(t))$, donc $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{Pm} = (k - a\cos(t)).(a\cos(t)) + (-a\sin(t))(a\sin(t))$
$= -a^2(sin(t))^2 - a^2(cos(t))^2 + ka\cos(t) = 0$ d'où $k = \frac{a}{cos(t)} \Rightarrow m(\frac{a}{\cos(t)}, 0)$ donc m appartient à $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, car vérifie : $\frac{x.x_m}{a^2} + \frac{y.y_m}{b^2} = \dfrac{\frac{a}{\cos t}.a\cos t}{a^2} = 1$.

3.3 Hyperbole $\mathcal{H}$ et ses assymptotes

Théorème
Soit $M \in \mathcal{H}$. Alors la tangente à $\mathcal{H}$ en M notée $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ coupe les deux assymptotes en u et v symétriques par rapport à M.

preuve
Les deux assymptotes $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ont respectivement pour équations $y = -\frac{b}{a}x$ et $y = \frac{b}{a}x$.
Soit $J \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow (-\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1, y = -\frac{b}{a}x) \Leftrightarrow (-\frac{xy_0}{ab} + \frac{xx_0}{a^2} = 1, y = -\frac{b}{a}x)$
$\Leftrightarrow (x(\frac{y_0a + x_0b}{a^2b = 1}), y = -\frac{b^2a}{y_0a + x_0b})$
Soit $J \in \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \Leftrightarrow (-\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1, y = \frac{b}{a}x)$...
On vérifie ensuite que : $\dfrac{x_I + x_J}{2} = x_M$ et $\dfrac{y_I + y_J}{2} = y_M$, donc que $M = milieu[IJ]$