

# Exposé 50 : Définition de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite. Equivalence entre ces deux définitions.

- Prérequis<sup>1</sup>** :
- Projection orthogonale
  - Calcul vectoriel
  - Calcul de distances
  - Symétrie centrale et axiale
  - Barycentres
  - Ligne de niveau  $\frac{MA}{MB} = k$

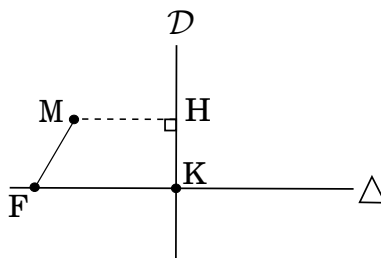
**Cadre de l'exposé** :  $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$  plan affine Euclidien

## 1 Définition géométrique de l'hyperbole

### 1.1 Définition

**Définition** : soit  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ ,  $F \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$  et  $e$  un réel tel que  $e > 1$ . On appelle l'hyperbole de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$ , et d'excentricité  $e$ , l'ensemble  $\mathcal{H}(F, \mathcal{D}, e) = \{M \in \mathcal{P}, \frac{MF}{MH} = e\}$ , où  $H = \text{proj}_{\perp, \mathcal{D}}(M)$ .

**Définition** : la droite  $\Delta$  perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par  $F$  est appelé axe focal de  $\mathcal{H}$ . On note  $\{K\} = \mathcal{D} \cap \Delta$



### 1.2 Sommets

**Proposition** : l'hyperbole  $\mathcal{H}$  coupe  $\Delta$  en deux points distincts  $A$  et  $A'$  qui sont appelés sommets de  $\mathcal{H}$ . De plus,  $A = \text{bar}\{(F; 1), (K; e)\}$  et  $A' = \text{bar}\{(F; 1), (K; -e)\}$

preuve : soit  $\{K\} = \mathcal{D} \cap \Delta$ .  $M \in \mathcal{H} \cap \Delta \Leftrightarrow \frac{MF}{MK} = e \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MK^2$

donc  $M \in \mathcal{H} \cap \Delta \Leftrightarrow (\vec{MF} + e\vec{MK}) \cdot (\vec{MF} - e\vec{MK}) = 0$ ; or ces deux vecteurs sont colinéaires car  $M \in \Delta$ , donc  $M \in \mathcal{H} \cap \Delta \Rightarrow \vec{MF} + e\vec{MK} = \vec{0}$  ou  $\vec{MF} - e\vec{MK} = \vec{0}$ .

On a donc montré que  $M \in \mathcal{H} \cap \Delta \Rightarrow M = \text{bar}\{(F; 1), (K; e)\}$  ou  $M = \text{bar}\{(F; 1), (K; -e)\}$

Inversement, soient  $A = \text{bar}\{(F; 1), (K; e)\}$ ,  $A' = \text{bar}\{(F; 1), (K; -e)\}$  ( $A, A'$  existent bien car  $e \neq 1$ ,  $e \neq -1$ ), d'où  $\vec{AF} + e\vec{AK} = \vec{0}$  et  $\vec{A'F} - e\vec{A'K} = \vec{0}$ , donc  $(\vec{AF} + e\vec{AK}) \cdot (\vec{AF} - e\vec{AK}) = 0$ , donc  $A \in \mathcal{H} \cap \Delta$   $\square$

<sup>1</sup>L'exposé a été tapé le 28/05/2007. Mis à jour le 28/05/2007.

### 1.3 Symétrie de $\mathcal{H}$

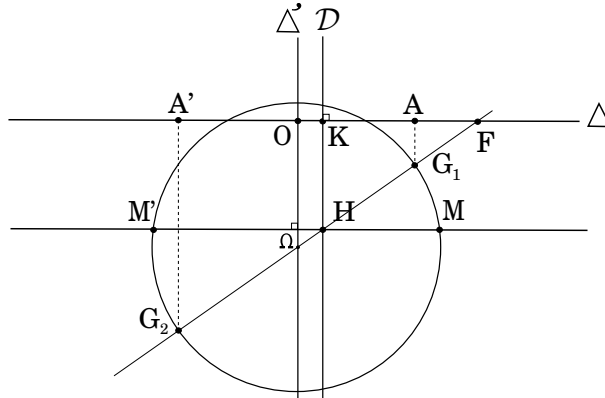
**Proposition** :  $\Delta$  et la médiatrice  $\Delta'$  de  $[AA']$  sont axes de symétries de  $\mathcal{H}$ . Le point  $O = m[AA']$  est centre de symétrie de  $\mathcal{H}$ .

**Définition** :  $\Delta'$  est appelé axe focal de  $\mathcal{H}$ , et  $O$  le centre de  $\mathcal{H}$ .

### 1.4 Construction point par point

Soit  $\mathcal{H}(F, \mathcal{D}, e)$  et soient  $M, M' \in \mathcal{H}$  tels que  $H = \text{proj}_{\text{perp}, \mathcal{D}}(M) = \text{proj}_{\perp, \mathcal{D}}(M')$

**Proposition** : soit  $G_1 = \text{bar}\{(F; 1), (H, e)\}$  et  $G_2 = \text{bar}\{(F; 1), (H, -e)\}$ . Alors  $M, M' \in C([G_1G_2])$



preuve :  $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow MF^2 - eMH^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MH}) \cdot (\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MH}) = 0$

donc  $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (1+e)\overrightarrow{MG_1}(1-e)\overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow M \in C([G_1G_2])$  □

### 1.5 Deuxième couple (foyer, directrice)

Soit  $\mathcal{H}(F, \mathcal{D}, e)$  de sommets  $A$  et  $A'$ , et  $O$  le centre de l'hyperbole.

**Proposition** : toute hyperbole possède deux foyers et deux directrices symétriques par rapport à son axe non focal  $\Delta'$

**preuve** : on utilise les propriétés de de la symétrie  $s_{\Delta'}$ , où  $\Delta'$  axe non focal.

## 2 Définition de l'hyperbole par équation réduite

**Proposition** : soit  $\mathcal{H}$  une hyperbole de foyer  $F$ , de directrice  $\mathcal{D}$ , et d'excentricité  $e$ . Alors il existe un repère orthonormé, et des réels  $a, b$  dans lequel l'hyperbole  $\mathcal{H}$  a pour équation :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  avec  $a > b > 0$

**Définition** : on appelle cette équation, **équation réduite** de  $\mathcal{H}$

preuve : soient  $A, A'$  les sommets de  $\mathcal{H}$  et  $O$  le centre de  $\mathcal{H}$  (ie  $O = m[AA']$ ). On pose  $OA = OA' = a$ ,

$c = OF = OF'$ . On considère le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tq.  $\overrightarrow{OF} = c\vec{i}$ , ie  $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = 0 \\ \overrightarrow{A'F} + e\overrightarrow{A'K} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} = (1+e)\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK} = (1-e)\overrightarrow{OA'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OA} = e\overrightarrow{OK} \end{cases} \text{ donc } c = OF = eOA = ea$$

Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la directrice  $\mathcal{D}$  a pour équation  $x = \frac{a^2}{c}$  (car  $\mathcal{D}$  passe par  $K(\frac{a}{e}, O)$  et  $\mathcal{D} \perp \Delta$ ), donc  $M(x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2 \Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = e^2(x - \frac{a^2}{c})^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  avec  $b^2 = c^2 - a^2$  □

Conséquences : -L'équation réduite permet d'établir les symétries déterminées en première partie.

-On obtient un tracé précis de l'hyperbole en considérant les fonction  $f_1(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

et  $f_2(x) = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$

De plus  $f_1$  admet pour asymptote en + inf :  $y = \frac{b}{a}x$ , en - inf :  $y = -\frac{b}{a}x$

De même  $f_2$  admet pour asymptote en + inf :  $y = -\frac{b}{a}x$ , en - inf :  $y = \frac{b}{a}x$

Exercices : soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé,  $\mathcal{D} : 2x + y = 1$ ,  $F(-1; -1)$  et  $e = 2$ .  
Quelle est l'équation réduite de  $\mathcal{H}(\mathcal{D}, F, e)$  ?

### 3 Equivalence entre ces deux définitions

**Théorème** : dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe  $\mathcal{H}$  d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  avec  $a > b > 0$  est une hyperbole de foyer  $F(\sqrt{a^2 + b^2}; 0)$  de directrice associée  $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , et d'excentricité  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

preuve : posons  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , et  $e = \frac{c}{a}$ , donc  $F(c, 0)$  et  $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ . On reprend le même calcul que dans la démonstration précédente :

soit  $\mathcal{A} = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ . Alors on montre :  $M \in \mathcal{A} \Rightarrow M \in \mathcal{H}(F(c, 0); \mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}; e = \frac{c}{a})$

Inversement, on a vu que  $M(x, y) \in \mathcal{H} \Rightarrow M(x, y)$  tq.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ie  $M \in \mathcal{A}$ . Les deux ensembles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{H}$  sont donc égaux. □

### 4 Définition bifocale de l'hyperbole

**Proposition** : soit  $F, F' \in \mathcal{P}$  tq.  $FF' = 2c$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors  $\{M \in \mathcal{P}, |MF - MF'| = 2a\}$  est l'hyperbole de foyer  $F$  et  $F'$  et d'excentricité  $e$ .