Exposé 49 : Définition de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite. Equivalence entre ces deux définitions.

Prérequis[1] : -Projection orthogonale
-Calcul vectoriel
-Calcul de distances
-Symétrie centrale et axiale
-Barycentres
-Ligne de niveau $\dfrac{MA}{MB} = k$

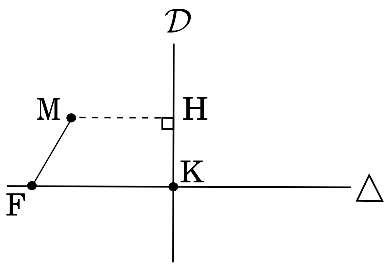
Cadre de l'exposé : $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{P}})$ plan affine Euclidien

1 Définition géométrique de l'ellipse

1.1 Définition

Définition : soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $F \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{D}$ et e un réel tel que $0 < e < 1$. On appelle ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, et d'excentricité e, l'ensemble $\mathcal{E}(F, \mathcal{D})$=$\{M \in \mathcal{P}, \dfrac{MF}{MH} = e\}$, où $H = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$.

Définition : la droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F est appelé axe focal de $\mathcal{E}$. On note $\{K\} = \mathcal{D} \bigcap \Delta$



1.2 Sommets

Proposition :l'ellipse $\mathcal{E}$ coupe Δ en deux points distincts A et A' qui sont appelés sommets de $\mathcal{E}$. De plus, $A = bar\{(F; 1), (K, e)\}$ et $A' = bar\{(F; 1), (K, -e)\}$

<u>preuve</u> : soit $\{K\}$=$\mathcal{D} \cap \Delta$. $M \in \mathcal{E} \cap \Delta \Leftrightarrow \dfrac{MF}{MK} = e \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MK^2$
donc $M \in \mathcal{E} \cap \Delta \Leftrightarrow (\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK}).(\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK}) = 0$; or ces deux vecteurs sont colinéaires car $M \in \Delta$,
donc $M \in \mathcal{E} \cap \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK} = 0$.
On a donc montré que $M \in \mathcal{E} \cap \Delta \Rightarrow M = bar\{(F; 1), (K; e)\}$ ou $M = bar\{(F; 1), (K; -e)\}$
Inversement, soient $A = bar\{(F; 1), (K; e)\}$, $A' = bar\{(F; 1), (K; -e)\}$ (A, A' existent bien car $e \neq 1$, $e \neq -1$), d'où $\overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = 0$ et $\overrightarrow{A'F} - e\overrightarrow{A'K} = 0$, donc $(\overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK}).(\overrightarrow{AF} - e\overrightarrow{AK}) = 0$, donc $A \in \mathcal{E} \cap \Delta$ □

[1] L'exposé a été tapé le 10/05/2007. Mis à jour le 17/05/2007.

1.3 Symétrie de $\mathcal{E}$

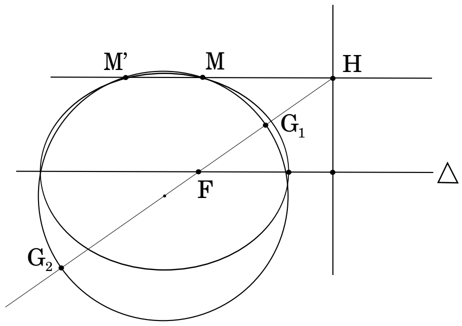
Proposition : Δ et la médiatrice Δ' de $[AA']$ sont axes de symétries de $\mathcal{E}$. Le point $O = m[AA']$ est centre de symétrie de $\mathcal{E}$.

Définition :Δ' est appelé axe focal de $\mathcal{E}$, et O le centre de $\mathcal{E}$.

1.4 Construction point par point

Soit $\mathcal{E}(F, \mathcal{D}, e)$ et soient $M, M' \in \mathcal{E}$ tels que $H = proj_{perp,\mathcal{D}}(M)$=$proj_{\perp,\mathcal{D}}(M')$

Proposition : soit $G_1 = bar\{(F; 1), (H, e)\}$ et $G_2 = bar\{(F; 1), (H, -e)\}$. Alors $M, M' \in \mathcal{C}([G_1G_2])$

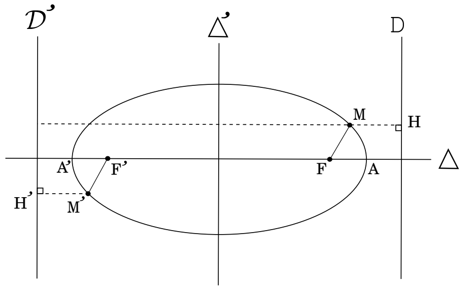


preuve : $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow MF^2 - eMH^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MH}).(\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MH}) = 0$
donc $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (1 + e)\overrightarrow{MG_1}(1 - e)\overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2} = 0 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}[G_1G_2]$ □

1.5 Deuxième couple (foyer, directrice)

Soit $\mathcal{E}(F, \mathcal{D}, e)$ de sommets A et A', et O le centre de l'ellipse.

Proposition : soit F' et $\mathcal{D}'$ les symétriques de F et $\mathcal{D}$ par rapport à O. L'ellipse $\mathcal{E}$ coïncide avec l'ellipse $\mathcal{E}'$ de foyer F', et de directrice $\mathcal{D}'$, et d'excentricité e.



preuve : on utilise la propriété de la symétrie de centre O.

2 Définition de l'ellipse par équation réduite

Proposition : soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, et d'excentricité e. Alors il existe un repère orthonormé, et des réels a, b dans lequel l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$

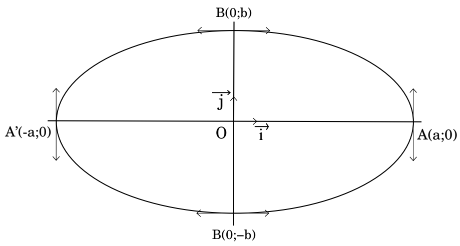
Définition : on appelle cette équation, **équation réduite** de $\mathcal{E}$

preuve : soient A, A' les sommets de $\mathcal{E}$ et O le centre de $\mathcal{E}$ (ie $O = m[AA']$). On pose $OA = OA' = a$, $c = OF$. On considère le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tq. $\overrightarrow{OF} = c\overrightarrow{i}$, ie $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = 0 \\ \overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} = (1+e)\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK} = (1-e)\overrightarrow{OA'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OA} = e\overrightarrow{OK} \end{cases} \text{ donc } c = OF = eOA = ea$$

Dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $x = \dfrac{a^2}{c}$ (car $\mathcal{D}$ passe par $K(\dfrac{a}{e}, O)$ et $\mathcal{D} \perp \Delta$),
donc $M(x, y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow MF^2 = e^2 MH^2 \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2(x - \dfrac{a^2}{c})^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $b^2 = a^2 - c^2$ □

Conséquences : -L'équation réduite permet d'établir les symétries déterminées en première partie.
-On obtient un tracé précis de l'ellipse en considérant la fonction $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ avec $0 \le |x| \le a$



Exercices : soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé, $\mathcal{D} : 2x + y = 1$, $F(-1; -1)$ et $e = \dfrac{1}{2}$.
Quelle est l'équation réduite de $\mathcal{E}(\mathcal{D}, F, e)$?

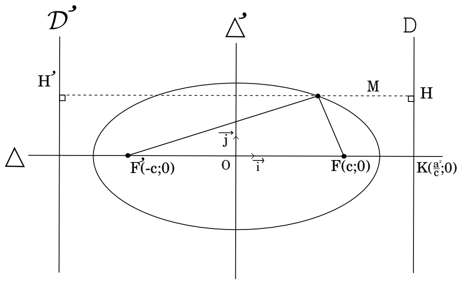
3 Equivalence entre ces deux définitions

Théorème : dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ est une ellipse de foyer $F(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$ de directrice associée $\mathcal{D} : x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^b}}$, et d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

preuve : posons $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, et $e = \dfrac{c}{a}$, donc $F(c, 0)$ et $\mathcal{D} : x = \dfrac{a^2}{c}$. On reprend le même calcul que dans la démonstration précédente :
soit $\mathcal{A} = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$. Alors on montre que $M \in \mathcal{A} \Rightarrow M \in \mathcal{E}(F(c, 0); \mathcal{D} : x = \dfrac{a^2}{c}; e = \dfrac{c}{a})$
Inversement, on a vu que $M(x, y) \in \mathcal{E} \Rightarrow M(x, y)$ tq. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, ie $M \in \mathcal{A}$. Les deux ensembles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ sont donc égaux. □

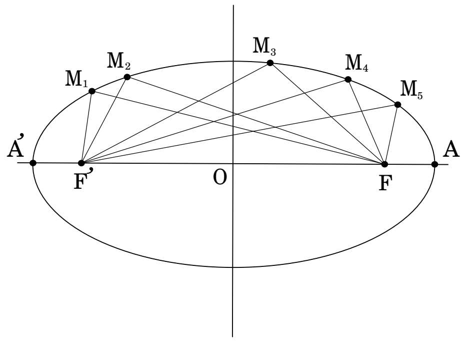
4 Définition bifocale de l'ellipse

Proposition : soit $F, F' \in \mathcal{P}$ tq. $FF' = 2c$, $a \in \mathbb{R}$ tq. $a > c > 0$. Alors $\{M \in \mathcal{P}, MF + MF' = 2a\}$ est l'ellipse de foyer F et F'



Application :construction point de par points de l'ellipse définie par $MF + MF' = 2a$. Il suffit de prendre les points d'intersection de deux cercles de centre F et F' et de rayon l et l' tq. $l + l' = 2a$, et $l, l' \in [a - c; a + c]$ (ie $l + l' = AA'$; remarque : $a = OA$, $c = OF$ donc $c < a$)...

Méthode du jardinier : construction point par point d'une ellipse à l'aide d'une corde et de ses deux foyers F et F'. On prend une ficelle de longueur $2a$, fixée en F et F'...



remarque :
-si $a = b$, on ne parle pas d'ellipse, car on a un cercle et $e = 0$, donc directrice rejetée à l'infini
-et si $a < b$? On échange le rôle de a et b, et on fait une rotation de $\frac{\pi}{2}$ ($\overrightarrow{i}$ devient $\overrightarrow{j}$ et inversement).