Exposé 48 : Ellipses déduites d'un cercle par affinité orthogonale. Applications.

Prérequis[1] :
-Définition et propriétés des projections et symétries
-Définition et propriétés des applications affines
-Définition des cercles et ellipses par équations réduites

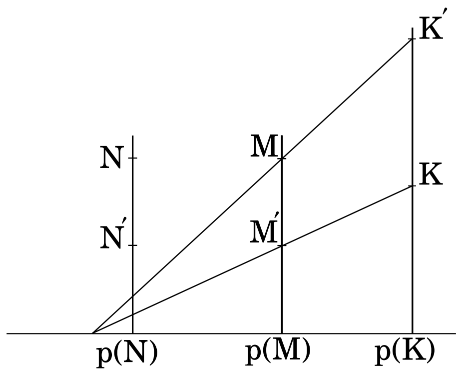
Cadre de l'exposé : Soit $\mathcal{E}$ plan affine euclidien, $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ espace vectoriel associé.

1 Rappel sur les affinités orthogonales

Définition : soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, et $k \in \mathbb{R}^*$. L'affinité orthogonale de base $\mathcal{D}$ et de rapport k, notée $f_{\mathcal{D},k}$ est l'application $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & M' \end{array}$ telle que $\overrightarrow{p(M)M'} = k.\overrightarrow{p(M)M}$, où $p(M) = p_{\perp,\mathcal{D}}(M)$

remarques :
– on exclu $k = 0$ car alors f est une projection (pas une affinité car pas bijective)
– si $k = 1$, $f = Id$
– si $k = -1$, $f = s_{\mathcal{D}}$ (réflexion)

exemple : $k = \dfrac{1}{2}$



Théorème 1 : $f_{\mathcal{D},k}$ est une **application affine**, d'application linéaire associée. $k.\overrightarrow{Id} + (1-k).\overrightarrow{p}$

preuve : soit $M' = f(M)$, $N' = f(N)$. On cherche $\overrightarrow{\varphi}$ tel que $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{MN})$
$\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{M'p(M)}+\overrightarrow{p(M)p(N)}+\overrightarrow{p(N)N'}=-k\overrightarrow{p(M)M}+\overrightarrow{p(M)p(N)}+k\overrightarrow{p(N)N}=$
$k.(\overrightarrow{Mp(M)}+\overrightarrow{p(M)p(N)}+\overrightarrow{p(M)N})+(1-k)\overrightarrow{p(M)p(N)}=k\overrightarrow{MN}+(1-k)\overrightarrow{p}(\overrightarrow{MN})=(k\overrightarrow{I_d}+(1-k)\overrightarrow{p})(\overrightarrow{MN})$
Donc $f_{\mathcal{D},k}$ est une application affine, d'application linéaire associée $\overrightarrow{\varphi}=k.\overrightarrow{Id}+(1-k).\overrightarrow{p}$ □

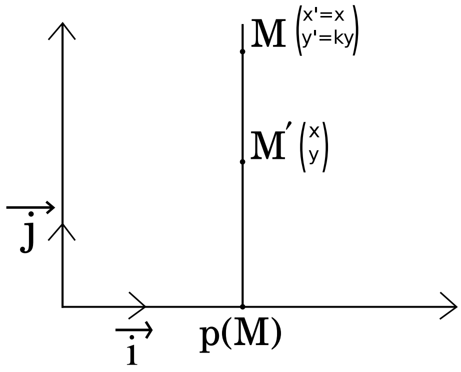
[1] L'exposé a été présenté à Bordeaux(4) en 2005 par Armelle, corrigé par M.P., tapé par Gwendal Haudebourg. Réalisé avec LaTeX, et Inkscape pour les dessins. Mise à jour le 20/03/2006

rem :

1. $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{p(M)p(N)}$ (p projection)
2. $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}+(1-k)\overrightarrow{p(M)p(N)}$ et $\overrightarrow{p(M)p(N)} = \overrightarrow{M'N'}$ si $(MN) \parallel (\mathcal{D})$
   donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ si $(MN \parallel (\mathcal{D})$

Proposition :
(i) f bijective $\Leftrightarrow k \neq 0$ et $f^{-1} = f_{\mathcal{D},\frac{1}{k}}$
(ii) si $k \neq 1$, $Fix(f) = \mathcal{D}$

Expression analytique : $\overrightarrow{p(M)M'} = k.\overrightarrow{p(M)M}$ d'où $p(M)= \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M'= \begin{pmatrix} x' = x \\ y' = k.y \end{pmatrix}$



2 Image d'un cercle par affinité orthogonale dans le plan

Théorème 2 :

1. L'image d'un cercle par une affinité orthogonale ($k \neq 0$) est une ellipse
2. Toute ellipse $\mathcal{E}$ d'équation réduite $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) est l'image de son cercle principal C_a (resp. son cercle secondaire C_b), d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ (resp. $x^2 + y^2 = b^2$) par l'affinité orthogonale f de base $[Ox)$ (resp. $[Oy)$) et de rapport $\frac{b}{a}$ (resp. $\frac{a}{b}$).

preuve :

1. (a) soit $\Omega(x_0, y_0)$, $C := C(\Omega, R) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
   Soit $f_{\mathcal{D},k} : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ M(x,y) & \mapsto & M'(x' = x, y' = ky) \end{array}$ avec $M'= \begin{pmatrix} x' = x \\ y' = k.y \end{pmatrix}$
   Alors $f_{\mathcal{D},k}(C) : (x' - x_0)^2 + (\frac{y'}{k} - y_0) = R^2$,
   d'où $f_{\mathcal{D},k}(C) : \dfrac{(x' - x_0)^2}{R^2} + \dfrac{(\frac{y'}{k} - y_0)}{R^2 k^2} = 1$ (bien une ellipse)
2. (b) soit $C_a : x^2 + y^2 = a^2$ et $f_{[Ox),\frac{b}{a}} : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ M(x,y) & \mapsto & M'(x' = x, y' = y\frac{b}{a}) \end{array}$

   $f_{[Ox),\frac{b}{a}}(C_a) : \ x'^2 + \dfrac{a^2}{b^2} y'^2 = a^2$

   $f_{[Ox),\frac{b}{a}}(C_a) : \ \dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$, donc $\mathcal{E} = f(C_a)$

□

rem : preuve pas finie en (a) : cela montre juste que tout point de C est envoyé sur une ellipse. Mais rien ne nous dit que cette ellipse est entièrement décrite...

3 Applications

3.1 Construction d'une ellipse point par point

On construit les cercles principaux $\mathcal{C}_a$, $\mathcal{C}_b$ puis un point queclonque M sur $\mathcal{C}_a$. On trace la tangente à $\mathcal{C}_a$ en M ; cette tangente coupe (Ox) au point K. Soit $R = (OM) \bigcap \mathcal{C}_b$. Soit D_1 la perpendiculaire à (Oy) passant par R. Soit D_2 la perpendiculaire à (Ox) passant par M. Soit $n \in D_1 \bigcap D_2$.
Alors $N \in \mathcal{E}$, et $(NK) = \mathcal{T}_{N,\mathcal{E}}$ (tangente à $\mathcal{E}$ au point N).

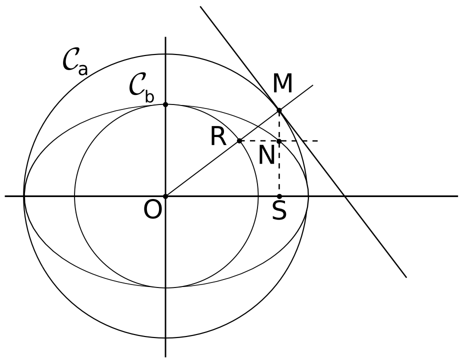
preuve : par le théorème de Thalès, $\dfrac{\overline{OR}}{\overline{OM}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\overline{SN}}{\overline{SM}}$, donc $\overline{SN} = \dfrac{b}{a}\overline{SM}$

Donc par le théorème 2-b, le point N appartient à l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

$f_{[Ox),\frac{b}{a}} : \begin{array}{ccc} M & \mapsto & N \\ K & \mapsto & K \end{array}$ donc $(MK) \mapsto (NK)$.

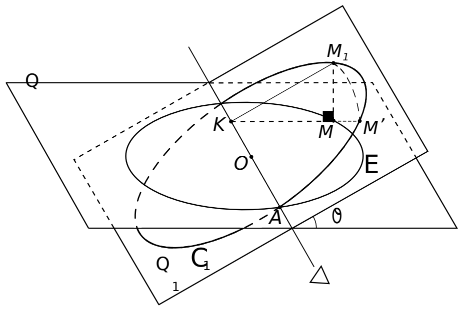
Or (MK) est la tangente à $\mathcal{C}_a$ en M, donc (NK) est la tangente à $\mathcal{E}$ en N $\square$

rem : peut-être faudrait-il détailler que affinité conserve le contact



3.2 Projection orthogonale d'un cercle sur un plan

Proposition : le projeté orthogonal d'un cercle de rayon R et de plan $\prod_1$ sur un plan $\prod$ **non perpendiculaire** à $\prod_1$ est une ellipse de demi-axes R et $R\cos\theta$, où θ est l'angle géométrique de $\prod$ et $\prod_1$, $\theta \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$

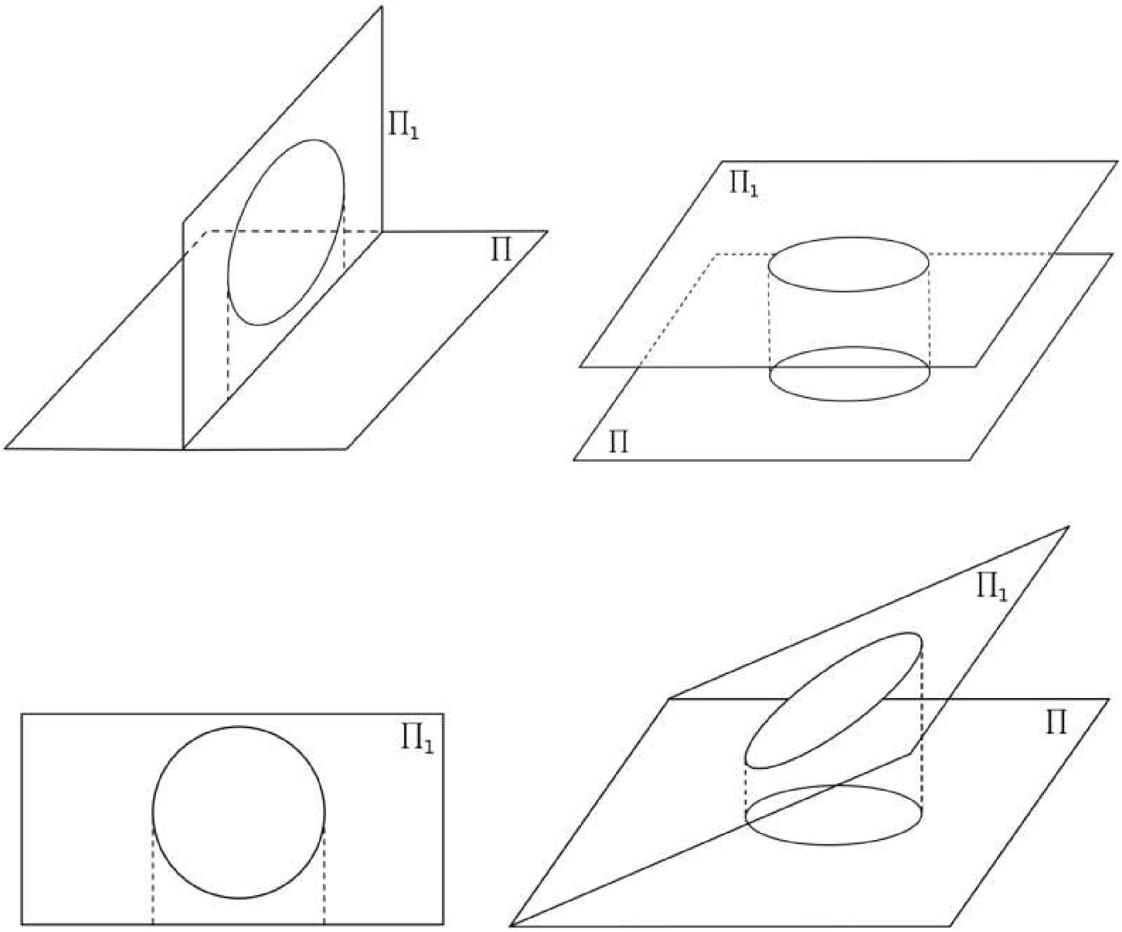


preuve : on fait une rotation vectorielle $\vec{r}(\theta, \Delta)$, puis une affinité orthogonale $f(\Delta, k)$. Soit $B \in C_1$, $B \notin \Delta$, soit $P_\perp = f \circ \vec{r}$, d'où :

$$P_\perp : \begin{array}{ccccc} C_1 & \mapsto & C_2 & \mapsto & \mathcal{E} \\ O & \mapsto & O & \mapsto & O \\ A & \mapsto & A & \mapsto & A \\ M_1 & \mapsto & M' & \mapsto & M \\ B_1 & \mapsto & B' & \mapsto & B \end{array}$$

Rapport $k = ?$ $k = \dfrac{KM}{KM'} = \dfrac{KM}{KM_1} = \dfrac{KM_1 \cos\theta}{KM_1}$

L'image $\mathcal{E}$ de C_1 par $P_\perp$ est l'ellipse de demi-axes $OA = R$ et $OB = OB' \cos\theta = R\cos\theta$ $\square$



4 Compléments

4.1 Terracher