Exposé 46 : Réflexions et rotations de l'espace. Effet sur les distances, les angles...Applications à l'action sur les configurations usuelles.

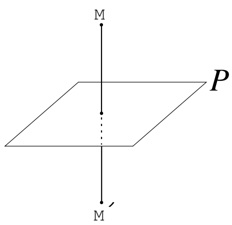
Prérequis[1] : -Rotation et réflexion dans le plan
-Barycentre
-Orientation de l'espace
-Projection orthogonale
-Plan médiateur $\mathcal{P}_{[AB]} = \{M \in \mathcal{E}, MA = MB\}$

Cadre de la leçon : $(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}})$ espace affine euclidien de dimension 3.

1 Réflexions et rotations de l'espace

1.1 Réflexions de l'espace

Définition 1 : soit $\mathcal{P}$ plan de $\mathcal{E}$. On appelle réflexion de plan $\mathcal{P}$ la transformation $s : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$ tq : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ où $H = proj_{\mathcal{P},\perp}(M)$



Remarque : $s \circ s = Id$ (ie la réflexion est involutive)

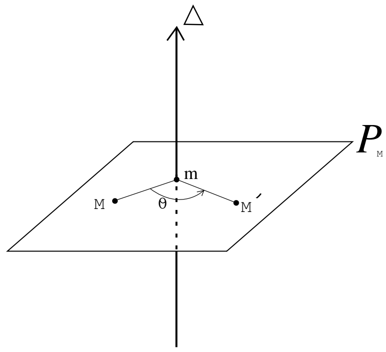
Proposition 1 : le plan $\mathcal{P}$ ainsi définit est le plan médiateur de $[MM']$, ie $\mathcal{P} = \{X \in \mathcal{E}, XM = XM'\}$

preuve : soit $X \in \mathcal{P}$, $X \neq H$, donc $(HX) \perp (MM')$ car $H = proj_{\mathcal{P},\perp}(M)$. Or $MH = MH'$ donc (pythagore) X appartient au plan médiateur de $[MM']$, idem pour deux autres points distincts X_1 et X_2 (de plus le plan médiateur est de dimension 2, tout comme $\mathcal{P}$), donc $\mathcal{P}$ est le plan médiateur de $[MM']$ □

1.2 Rotations de l'espace

Définition 2 : soit Δ une droite orientée, $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation d'axe Δ et d'angle θ est l'application $r_{\Delta,\theta}$: $\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$ tq. si $\mathcal{P}_M$ est le plan passant par M et orthogonal à Δ, en notant $\Delta \cap \mathcal{P}_M = \{m\}$, alors $M' = R_{m,\theta}(M)$ où $R_{m,\theta}$ est la rotation de plan $\mathcal{P}_M$ ($\mathcal{P}_M$ orienté compatiblement avec Δ), de centre m et d'angle θ.

[1]Tapé et présenté par Gwendal à Bordeaux IV le 10/01/2007, corrigé par M.P. Réalisé avec LaTeX, Inkscape pour les dessins.



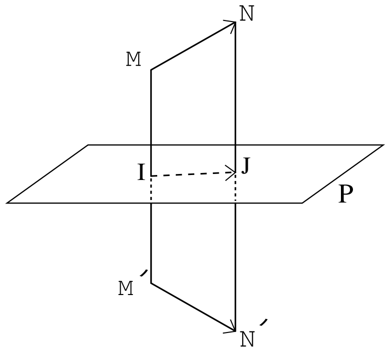
Remarques : -on a donc $mM' = mM$ et $(\overrightarrow{mM}, \overrightarrow{mM'}) = \theta[2\pi]$
-$\theta = 0[2\pi] \Leftrightarrow r_{\Delta,\theta} = Id$
-si $\theta \neq 0[2\pi]$ alors $r_{\Delta,\theta}(M) = M \Leftrightarrow M \in \Delta$
(ie si $r \neq Id$, l'ensemble des points invariants par r coïncide avec laxe de rotation)

1.3 Propriétés des réflexions et des rotations

Lemme 1 : soit $\overrightarrow{s}$: $\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{P}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{P}^\perp} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} & \mapsto & \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} \end{array}$ et $\overrightarrow{r}$: $\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\mathcal{P}^\perp} \oplus \overrightarrow{\mathcal{P}} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} & \mapsto & \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{r_\theta}(\overrightarrow{u_2}) \end{array}$

où $\overrightarrow{r_\theta}$ est la rotation vectorielle d'angle θ dans le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\Delta^\perp}$, orienté par sa normale $\overrightarrow{\Delta}$.
Alors les applications $\overrightarrow{s}$ et $\overrightarrow{r}$ sont linéaires bijectives (ce sont donc des automorphismes).

Théorème 1 :
(1) $s_{\mathcal{P}}$ et $r_{\Delta,\theta}$ sont des applications affines bijectives, de parties linéaires associées $\overrightarrow{s}$ et $\overrightarrow{r}$ définies ci-dessus.
(2) Ces applications conservent le produit scalaire, les barycentres et l'alignement. Elles transforment une droite en une droite, un plan en un plan, et conservent l'orthogonalité et le parallélisme des droites et des plans.
(3) Ces applications sont des isométries de $\mathcal{E}$, elles conservent donc les aires, les volumes, les angles nons orientés de vecteurs.
(4) Ces applications conservent les angles nons orientés de vecteurs.



preuve : (1) soit $(M, N) \in \mathcal{E}$, notons $M' = s_{\mathcal{P}}(M)$, $N' = s_{\mathcal{P}}(N)$, $I = m[MM'] \in \mathcal{P}$ et $J = m[NN'] \in \mathcal{P}$.
Alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ où $\overrightarrow{u_1} := \overrightarrow{IJ} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN} \in \overrightarrow{\mathcal{P}^\perp}$. On a donc :
$\overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{IJ} - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}) = \overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{JN'}) = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{s(M)s(N)}$, or $\overrightarrow{s}$ est linéaire, donc s est une application affine (de même pour r).
(2) soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{P}^\perp}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{P}^\perp}$. On a
$\overrightarrow{M'N'}.\overrightarrow{S'T'} = \overrightarrow{s}(\overrightarrow{MN}).\overrightarrow{s}(\overrightarrow{ST}) = (\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}).(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{v_2}$, et
$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{ST} = (\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}).(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{v_2}$, d'où conservation du produit scalaire.

Soit $G = bar\{(A_1, a_1); ...; (A_n, a_n)\}$, alors $\sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$, donc $\overrightarrow{s}(\sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{s}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{s}(\overrightarrow{GA_i})$ par linéarité de $\overrightarrow{s}$, ie $\sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{G'A'_i} = 0$, d'où conservation du barycentre (les propriétés suivantes en découlent).

(3) Par conservation du produit scalaire : $M'N'^2 = \overrightarrow{M'N'}.\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MN} = MN^2$, etc.

(4) $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow A'B'.A'C'.cos(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = AB.AC.cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow$ $cos(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow$ donc l'écart angulaire entre les vecteurs est bien conservé (ie valeur absolue des mesures principales). Même preuves pour les rotations. □

Théorème 2 :
(a) La composée $s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}'}$ de deux réflexions de plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants suivant une droite Δ est une rotation affine d'axe Δ et d'angle $\theta = 2(\mathcal{P}, \mathcal{P}')[2\pi]$
(b) Toute rotation $r_{\Delta,\theta}$ d'axe Δ se décompose (d'une infinité de façons) en produit de deux réflexions $s_{\mathcal{P}'} \circ s_{\mathcal{P}}$ avec $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \Delta$, tels que $(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \frac{\theta}{2}[\pi]$ (où $\mathcal{P}'$ choisi arbitrairement).

Remarque importante : on peut très bien construire l'exposé autrement : d'abord réflexions, puis ses propriétés, puis comme la rotation peut-être décomposée en produit de deux réflexions, c'est bien une application affine bijective, c'est une isométrie, plus propriétés, etc.

2 Applications

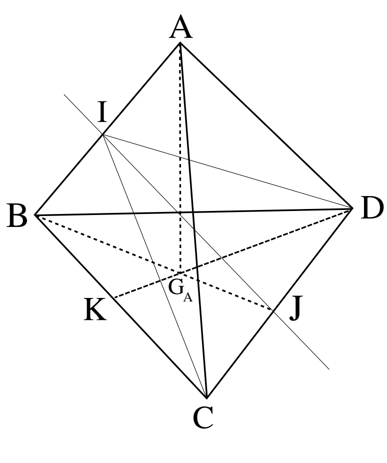
2.1 Isométries laissant globalement invariant un tétraèdre régulier

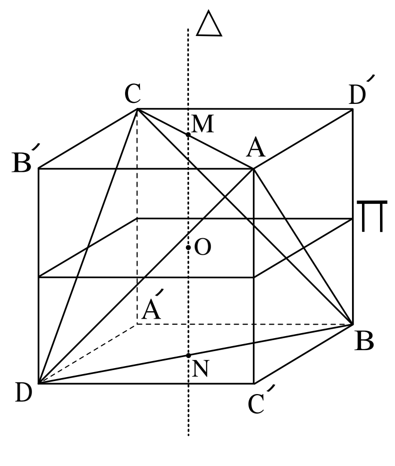
On note $\mathcal{G}$ le groupe des isométries affines, laissant globalement invariant le tétraèdre régulier. On admet qu'une isométrie appartient à $\mathcal{G}$ sisi elle laisse l'ensemble des sommets $\mathcal{S} = \{A, B, C, D\}$ globalement invariant.

Soit $\mathcal{S}(\{A, B, C, D\})$ le groupe des permutations de l'ensemble à quatres éléments $\{A, B, C, D\}$. On vérifie facilement que l'application φ :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G} & \to & \mathcal{S}(\{A,B,C,D\}) \\ f & \mapsto & \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ f(A) & f(B) & f(C) & f(D) \end{pmatrix} \end{array}$$

est un homomorphisme injectif (ie monomorphisme) de groupes, donc $|\mathcal{G}| \leqslant |\mathcal{S}(\{A, B, C, D\})| = 4! = 24$. Il existe donc moins de 24 isométrie laissant globalement invariant le tétraèdre régulier . Montrons qu'il en existe exactement 24, en les exhibants.





-L'identité laisse clairement le tétraèdre invariant.
-Si G_A désigne le centre de gravité de BCD, on vérifie que la droite (AG_A) est perpendiculaire au plan

BCD. Or ce triangle est équilatéral, donc les rotations $r_{A,\frac{2\pi}{3}}$ et $r'_{A,\frac{-2\pi}{3}}$ conservent le tétraèdre. Le tétraèdre possède 4 faces, donc on trouve ainsi $4 * 2 = 8$ rotations.
-Si $I = m[AB]$ et $J = m[CD]$, le plan médiateur de $[AB]$ est ICD (car I, C, D non alignés, et équidistants de A et B). Le tétraèdre est donc invariant par la rotation d'axe (IJ) et d'angle π (retournement autour d'une bimédiane). Il y a trois bimédianes dans le tétraèdre, donc 3 retournements ainsi décrits. On a trouvé ainsi 12 déplacements qui laisse globalement invariant le tétraèdre.

-Le plan ICD est le plan médiateur de $[AB]$, la réflexion par rapport au plan ICD conserve donc le tétraèdre. En composant cet antidéplacement avec les 12 déplacements trouvés précédement, on obtient 12 antidéplacements : s_{ICD}, $s_{ICD} \circ r_i$, $i = 1...9$ où r_i sont les rotations trouvés précédemment. Ces transformations sont bien des isométries conservant le tétraèdre, et sont différentes des 12 rotations précédentes (car ce sont des antidéplacements, par composition d'un déplacement et d'un antidéplacement). On les appelle des antirotations (ou symétrie-rotation).

remarque : on peut lister plus précidément les antidéplacements : on a montré que la réflexion par rapport au plan médiateur d'arrête $[AB]$ conserve le tétraèdre. On trouve ainsi 6 réflexions conservant le tétraèdre (car 6 arrêtes dans le tétraèdre), et ces réflexions laissent 2 points fixe du tétraèdre. De plus, l'antirotation (qui est un antidéplacement) de centre O , d'axe δ (qui est une bimédiane) $s_\pi \circ r_{\Delta,\frac{+\pi}{2}}$ (cf. figure) conserve le tétraèdre, et envoie (A, B, C, D) sur (B, C, D, A) ; de même pour $s_\pi \circ r_{\Delta,\frac{-\pi}{2}}$ qui envoie (A, B, C, D) sur (D, A, B, C). Cet antidéplacement n'est donc pas une des 6 réflexions trouvés (car pas de points fixes). On trouve ainsi 6 antirotations (trois bimédianes, deux angles de rotations possibles).
Résumé : les 24 éléments du groupe du tétraèdre régulier sont :

12 déplacements (rotations r_i) :
- l'identité
- les huit rotations autour des quatres hauteurs et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$
- les trois retournements autour des bimédianes (rotation d'angle π)

12 antidéplacements ($s_{ICD} \circ r_i$, $i = 1...n$) :
- 6 réflexions selon les plans médiateurs d'arêtes
- 6 antirotations (symétrie-rotation), d'axe les trois bimédianes, d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$

3 Compléments

3.1 Tétraèdre régulier

preuve (φ EST INJECTIVE) : soit f, f' deux isométries laissant globalement invariants le tétraèdre réguliers, telles que $f(A) = f'(A)$, $f(B) = f'(B)$, $f(C) = f'(C)$, $f(D) = f'(D)$. Or (A, B, C, D) forme un repère de l'espace (4 points non-coplanaires), et f, f' sont affines, donc comme elles sont égales sur un repère affine (de l'espace), elles sont égales sur l'espace tout entier, donc $f = f'$, et φ est injective. □

Il y a un problème dans la leçon : dans l'application, on parle de déplacements et d'antidéplacements. Il faudrait donc montrer que r est un déplacement (ie conserve l'orientation des angles orientés) et s un antidéplacement (ou peut aussi définir autrement les déplacements) :
-un endomorphisme $\overrightarrow{f}$ d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ est **orthogonal** s'il conserve le produit scalaire (on note alors $\overrightarrow{f} \in O(E)$, où $O(E)$ est le groupe orthogonal).
Proposition : f isométrie sisi $\overrightarrow{f} \in O(E)$
Définition 1 (déplacement) : une isométrie f est un déplacement si $\overrightarrow{f} \in SO(E)$ ie si $\overrightarrow{f}$ est de déterminant 1. Les autres isométries sont des antidéplacements.
Il est alors clair (avec cette définition), qu'un déplacement conserve tout angle orienté de droites ou de vecteurs, car l'action sur un angle ne dépend que de la partie linéaire qui est ici orthogonal directe.

Définition 2 (déplacement) : une isométrie f est un déplacement si elle conserve tout angle orienté de droites ou de vecteurs.
Dans une base orthonormale bien choisie, $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}(x', y', z')$:

Ecriture matricielle d'une rotation vectorielle de l'espace d'axe $\overrightarrow{D}$ et d'angle θ (rotation dans le plan des deux premiers vecteurs de base, fixe dans $\overrightarrow{D}$) (le déterminant est 1, donc c'est un déplacement) :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Ecriture matricielle d'une réflexion vectorielle de l'espace (reflexion par rapport au plan $\overrightarrow{P}$ engendré par les deux premiers vecteurs de base) (le déterminant est -1, donc c'est un antidéplacement) :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Ecriture matricielle d'une anti-rotation vectorielle (produit de la rotation d'axe $\overrightarrow{D}$, dangle θ, par la réflexion selon le plan orthogonal à $\overrightarrow{D}$, ie plan des deux vecteurs de base) (symétrie-rotation) (le déterminant est -1, donc c'est un antidéplacement) :

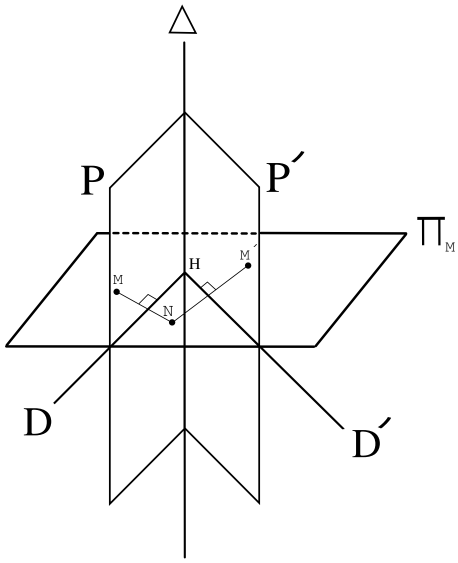
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

<u>Alternative</u> : il est toutefois possible de trouver les 24 isométries, sans parler de déplacements et d'antidéplacements : on montre qu'il y a moins de 24 isomtries, on exhibe les 12 rotations (et on montre qu'il n'y a que ces rotations-là), on exhibe les 6 réflexions (et on montre qu'il n'y a que ces réflexions-là), de même pour les antirotations (plus dur à exhiber).
Exemple (réflexions) : soit $s_{\mathcal{P}}$ une réflexion laissant globalement invariant le tétraèdre.
- si $A \to A$, alors :
  - si $B \to A$ exclu car s bijectif
  - si $B \to B$ alors $(AB) \in \mathcal{P}$ et :
    - si $C \to C$ alors $s = Id$ (exclu)
    - si $C \to D$ alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{[CD]}$ donc $\mathcal{P} = ABG_A$
  - si $B \to C$ alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{[BC]}$ donc $\mathcal{P} = ADG_A$
  - si $B \to D$ alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{[BD]}$ donc $\mathcal{P} = ACG_A$
- si $A \to B$ alors $\mathcal{P} = ICD$ où $I = m[AB]$
- si $A \to C$ alors $\mathcal{P} = BDM$ où $M = m[AC]$
- si $A \to D$ alors $\mathcal{P} = BCN$ où $N = m[AD]$

On a donc montré qu'il exite 6 réflexions laissant globalement invariant le tétraèdre régulier (et pas plus).

3.2 Divers

<u>preuve</u> (Théorème 2) : soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants en Δ, $M \in \mathcal{E}$, $N = s_{\mathcal{P}}(M)$ et $M' = s_{'\mathcal{P}}(N)$. Le plan π_M passant par M et orthogonal à Δ coupe $\mathcal{P}$ en D, $\mathcal{P}'$ en H et Δ en H, et l'on a $N = s_D(M)$, $M' = s_{D'}(N)$ où s_D et $s_{D'}$ sont les réflexions planes d'axes respectifs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$; si $\frac{\theta}{2}$ est une mesure de $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ dans le plan orienté π_M, on sait que $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ est une rotation plane $R_{H,\theta}$ de centre H et d'angle θ. Donc on passe de M à M' par la rotation de l'espace $r_{\Delta,\theta}$.
Réciproque : si $r_{\Delta,\theta}$ est une rotation donnée de l'espace, pour tout couple de plans $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ qui sont sécants en Δ, et qui font un angle de mesure $\frac{\theta}{2}$, on a $s_{\mathcal{P}'} \circ s_{\mathcal{P}} = r_{\Delta,\theta}$ en vertu de ce qui précède, ce qui démontre la réciproque. □



Autre définition possible de la réflexion :

Définition 1' : soit $\mathcal{P}$ plan de $\mathcal{E}$. On appelle réflexion de plan $\mathcal{P}$ la transformation $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tq :
-elle laisse invariant chaque point de $\mathcal{P}$
-Au point $M \notin \mathcal{P}$, elle associe le point M' tel que $\mathcal{P}$ soit le plan médiateur de $[MM']$.

3.3 Plan médiateur

Proposition-Définition : soit A, B distincts dans $\mathcal{E}$. Alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ tel que $s_{\mathcal{P}}(A) = B$. Ce plan est le plan passant par $I = m[AB]$, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. Il est appelé plan médiateur de $[AB]$.

Caractérisation : le plan médiateur de $[AB]$ est égale à $\{M \in \mathcal{E}, MA = MB\}$

preuve : grâce au théorème de la médiane : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

Régionnement de l'espace : soit A, B distincts dans $\mathcal{E}$. on pose $\mathcal{E}_A = \{M \in \mathcal{E}, MA < MB\}$ et $\mathcal{E}_B = \{M \in \mathcal{E}, MA > MB\}$. Alors $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ sont les demi-espaces ouverts associés à $\mathcal{P}$ (plan médiateur de $[AB]$) contenant respectivement A et B.

preuve : idem par le théorème de la médiane.

4 Questions du professeur

4.1 Orientation du plan, rotation de l'espace

Montrer que la rotation (dans l'espace) est correctement définie avec un axe orienté $\Delta(\overrightarrow{k})$ et un réel θ, ie que la rotation ne dépend pas du choix du couple de vecteurs directeurs du plan choisis (ces vecteurs étants choisis tels que le plan soir orienté "compatiblement" avec l'axe Δ, ie $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ choisis tq. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$ soit directe).

On se donne une base de départ $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ qui oriente l'espace. L'axe Δ est orienté par le vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ choisi (comme on veut). Pour orienter correctement le plan (dans l'espace), on se donne deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$ soit direct, ie $det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}) > 0$ (ou moins proprement, orienté par "la règle de la main droite") .

Soit $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ un autre couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$, choisis tels que $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{k})$ soit directe. Montrons que la rotation reste bien définie si le plan est orienté par ces vecteurs, ie montrons que $det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}) > 0$
Soit $\overrightarrow{u'} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v'} = c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v}$. On doit donc montrer que ie que $ad - bc > 0$; on sait que (règle du produit) :
$det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{k})$=$det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$*$det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{k})$
or $det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{k}) > 0$ et $det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}) > 0$, donc $det_{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{k}) = det \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$
ie $ad - bc > 0$.
Donc pour tout couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ non colinéaires tq. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$ direct, le plan (donc la rotation) est parfaitement orienté (donc parfaitement définie).

4.2 Nombres de points caractéristiques

Une rotation est parfaitement définie par un axe et un angle. Mais si on ne connaît pas l'axe de rotation, ni l'angle, de combien de points (de l'espace) a t-on besoin pour parfaitement définir la rotation ?

Dans le pla : on a besoin d'au plus 2 points
Dans l'espace : soit $M \in \mathcal{E}$, $r(M) = M'$, $r(M') = M''$
- si $M \neq M'$ deux points suffisent
- si $M'' = M$ trois points suffisent etc. (dessin)