Exposé 40 : Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté : calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles...

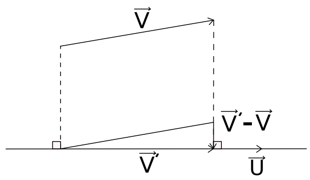
Prérequis[1] :
-Définition et propriétés du produit scalaire et vectoriel
-Vecteur normal à un plan
-Projection orthogonale

Cadre de la leçon
Soit $\mathcal{E}$ espace affine euclidien orienté (de dimension 2 ou 3), $\vec{E}$ espace vectoriel euclidien associé. On se place dans un repère orthonormé.

1 Calculs d'angles

Proposition 1.1
(i) $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|u\|\|v\|}$ (ii) $|\sin(\vec{u},\vec{v})| = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|u\|\|v\|}$

preuve
(i) soit immédiat avec la définition du produit scalaire par le cosinus, soit : $\frac{\vec{v'}}{\vec{v}} = |\cos(\vec{u},\vec{v})|$ d'où
$\vec{v'} = \|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ or $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.(\vec{v} - \vec{v'} + \vec{v}) = \vec{u}.\vec{v'}$ d'où $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$



(ii) immédiat par la définition géométrique (voir 4) du produit vectoriel

2 Calculs de distances

2.1 Distance entre deux points

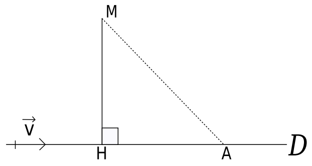
Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$. Alors $d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB}.\vec{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

[1] L'exposé a été présenté (et tapé) à Bordeaux(1) le 03/02/2005 par Gwendal Haudebourg, et a été corrigé par M. C. Mise à jour le 06/02/2006

2.2 Distance d'un point à une droite

Définition
On définit $d(M, \mathcal{D}) = inf\{MM', M' \in \mathcal{D}\}$

Proposition 2.1
(i) $d(M, \mathcal{D}) = MH$ avec $H = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$ (ii) $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{v}||}{||\overrightarrow{v}||}$ où $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{v})$



preuve 2.1
(ii) $d(M, \mathcal{D}) = MH$ et $MH = AM.|\sin(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM})| = AM.\frac{||\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{v}||||\overrightarrow{AM}||}$, d'où le résultat.

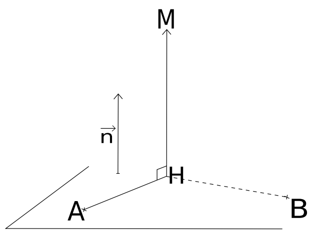
2.3 Distance d'un point à un plan

Définition
Soit $\mathcal{P}$ plan, $A \in \mathcal{P}$.On définit $d(M, \mathcal{P}) := inf\{MM', M' \in \mathcal{P}\}$

Définition
Soit $\overrightarrow{n}$ vecteur normal de $\mathcal{P}$, $A \in \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{n}) := \left\{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0\right\}$

Proposition 2.2
(i) $d(M, \mathcal{P}) = MH$ où $H = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$ (ii) $d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$ où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal et $A \in \mathcal{P}$ (intéressant uniquement si le plan est défini par un vecteur normal et un point).

preuve 2.2
(i) Pour tout $B \in \mathcal{P}$, $MH^2 + HB^2 = MB^2$ par pythagore, d'où $MB \geq MH$, donc MH est la distance minimale de $\mathcal{P}$ à M
(ii) $|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = |\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{n}| = MH.||\overrightarrow{n}||$ d'où $MH = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$



Proposition 2.3
Soit plan $\mathcal{P}$ est défini par trois points A, B, C. Alors :
$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||}$$

preuve 2.3
On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ (plan défini par A, B et C).

Corollaire
Si $\mathcal{P}$ est définit par trois points A, B, C, on a : $\mathcal{P}_{(ABC)} = \left\{\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0\right\}$

preuve (Corollaire)
On a : $\mathcal{P}_{ABC} = \{M \in \mathcal{E}, d(M, \mathcal{P}) = 0\} = \left\{\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0\right\}$ d'après prop. 2.3

Application du Corollaire
Soient $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$. Donnez l'équation de $\mathcal{P}_{ABC}$.
Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{P}_{ABC}$. Or $\mathcal{P}_{ABC} = \left\{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0\right\} = \left\{M \in \mathcal{E}, det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right\}$
$= \{M \in \mathcal{E} tq x - 1 + y + z = 0\}$. Donc $\mathcal{P} : x - 1 + y + z = 0$.

Remarque
Si $\mathcal{P}$ est défini par une équation cartésienne $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, alors :
$d(M, \mathcal{P}) = \dfrac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

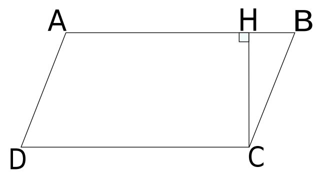
preuve 2.4
Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$, $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{P}$ (ie $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$), et $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ normal à $\mathcal{P}$.
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = ax + by + cz + d$ d'où le résultat par 2.2 (ii)

3 Calculs d'aire et de volumes

3.1 Calcul d'aire

Proposition 3.1
(i) Soit $ABCD$ un parallélogramme. Alors $\mathcal{A}_{ABCD} = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|| = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$
(ii) Soit ABC un triangle. Alors $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$

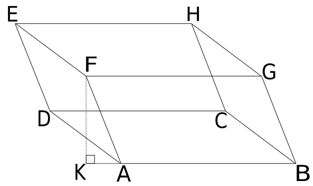
preuve 3.1
(i) $\mathcal{A} = AB.HC = AB.BC.|\sin(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC})| = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}||\ ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|| = ||\overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})|| = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$.
(ii) découle directement de (i) (demi-parallélogramme)

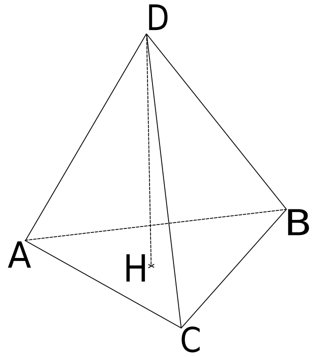


3.2 Calcul de volume

Proposition 3.2
(i) Soit $ABCDEFGH$ parallélépipède. $\mathcal{V}_p = |\overrightarrow{AF}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})|$
(ii) Soit $ABCD$ tétraèdre. $\mathcal{V}_t = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|$

preuve 3.2
(i) $\mathcal{V}_p = \mathcal{A}_{ABCD}.FK$ or $FK = d(F, \mathcal{P}_{ABD}) = \dfrac{|\overrightarrow{AF}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})|}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||}$ et $\mathcal{A}_{ABCD} = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||$ donc
$\mathcal{V}_p = |\overrightarrow{AF}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})|$





(ii) $\mathcal{V}_t = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}.DH$ or $DH = d(D, ABC) = \frac{\|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$ et $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ d'où $\mathcal{V}_t = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|$

4 Compléments et rappels

4.1 Norme-Produit scalaire

Définitions (Norme-Produit scalaire)
Norme : soit $\overrightarrow{u}$ un représentant de $\overrightarrow{AB}$. Alors $\|\overrightarrow{u}\| := d(A, B) = AB$ (la norme ne dépend pas du représentant choisi).
Produit scalaire : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, défini par : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} := \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$

4.2 Produit vectoriel

4.2.1 Définition classique

Définition (Produit mixte)
Soit $\overrightarrow{E}$ l'espace vectoriel orienté de dimension 3. On définit le produit mixte de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ (noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$) par $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] := det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de $\overrightarrow{E}$. Le produit mixte est indépendant de la b.o.n de $\overrightarrow{E}$ choisie.

Théorème-Définition (Produit vectoriel)
Pour tout couple de vecteur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{E}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{V}$ tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{E}$, on a : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{V}.\overrightarrow{w}$. Ce vecteur est appelé produit vetoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

4.2.2 Définitions plus géométrique

Définition (Produit vectoriel)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non-colinéaires de $\overrightarrow{E}$, et $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orientant $\mathcal{P}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} := \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).\overrightarrow{k}$

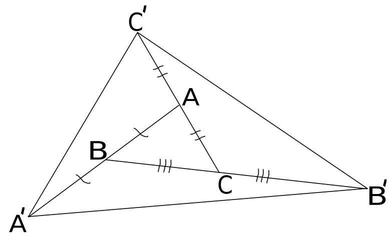
Définition (Produit vectoriel Terracher)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$. On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$, le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ défini ainsi :
-lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$
-lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (direction) ; $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe (sens) ;$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (norme).

4.2.3 Propriétés du produit vectoriel

Le produit vectoriel est bilinéaire, antisymétrique, alternée.
Dans la b.o.n $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{u}(x, y, z), \vec{v}(x', y', z')$, on a :
$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (x'z - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}$
Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ b.o.n de $\mathcal{E}$, alors $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}$.

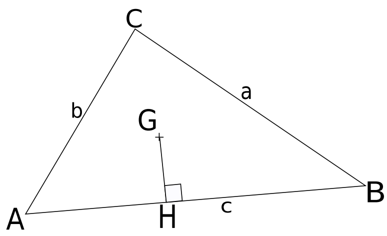
4.3 Exercices

(i)



Rapport entre $\mathcal{A}_{ABC}$ et $\mathcal{A}_{A'B'C'}$?
on a : $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'} = (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'}) \wedge (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC'}) = (\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}) \wedge (2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) = (3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}) \wedge (2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) =$
$3\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AC} \wedge 2\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CA} = 7\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CA}$
donc $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}\| = \frac{7}{2}\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CA}\| = \frac{7}{2}\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\| = 7\mathcal{A}_{ABC}$

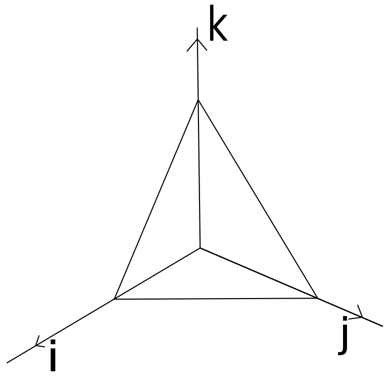
(ii)



Soit G isobarycentre de A, B, C. Relation entre $\mathcal{ABC}$, longueurs des côtés et distance de G à H ?
$GH = \dfrac{2\mathcal{A}_{AGB}}{c}$, or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\mathcal{A}_{AGB} = \dfrac{1}{2}||\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AB}||$
$= \dfrac{1}{6}||\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}|| = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{3}$ et $GH = \dfrac{2\mathcal{A}_{ABC}}{3c}$.
On peut faire de même en projetant G sur $[BC]$ et $[AC]$.

4.4 Questions

(1) Pourquoi a t-on $\mathcal{A}_{parallelogramme} = AB.HC$?
Parce que l'on suppose que l'aire d'un rectangle est $AB.BC$, puis on découpe le parallélogramme en rectangle de même aire.
(2) Pourquoi a t-on $\mathcal{V}_{parallelepipede} = \mathcal{A}_{ABCD}.FK$?
Par le même principe que ce qui précède : on découpe le parallélépipède de manière à obtenir un parallélépipède rectangle (boîte d'allumette) de même volume.
(3) Pourquoi $\mathcal{V}_{tetraedre} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}.DH$?
Pour le tétraèdre, c'est beaucoup moins évident : soit on le montre par intégration (en se ramenant au cas simple de la figure (*)) ; soit en découpant le tétraèdre, et en se ramenant à un parallélépipède (ce qui n'est vraiment pas évident à voir).



(4) Application des formules sur les angles :
Soient $\overrightarrow{u}(x, y), \overrightarrow{v}(x', y')$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (x, y, 0) \wedge (x', y', 0) = (0, 0, xy' - x'y)$.
$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$
$|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \dfrac{|xy' - yx'|}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$, donc si on se place dans un repère affine non orienté, on a :
$\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ (ie on pourrait très bien donner la formule avec le sinus sans la valeur absolue, à condition de se placer dans un repère non orienté...).