Exposé 3 : Coefficients binômiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications

Prérequis[1] :
-Notions d'ensemble fini
-Cardinal
-Définitions des p-arrangements d'un ensemble $\mathcal{A}$ de cardinal n
-Raisonnement par récurrence

1 Combinaisons

Définition 1
Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. On appelle combinaison de p-éléments de $\mathcal{A}$ (ou p-combinaison) toute partie de $\mathcal{A}$ à p éléments.
rq : la partie $\{a, b\}$ =*la partie* $\{b, a\}$

Théorème 1
Le nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n-éléments se note C_n^p (ou (n, p)) et se lit "nombre de combinaisons de p parmi n".
$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

preuve
Soit C_n^p l'ensemble des p-combinaisons de $\mathcal{A}$, avec $card(\mathcal{A}) = n$
Soit d *l'ensemble des p-arrangements de* $\mathcal{A}$
$|d| = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ ($|d|$ est souvent noté A_n^p ; dans $\mathcal{A}$ l'ordre des éléments est indifférents). Or il y a $p!$ permutations possible des éléments d'un p-arrangement, d'où $C_n^p = \dfrac{\mathcal{A}}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Remarque : $C_n^p = 0, \forall p > n$ (nombre de parties à p éléments parmi n, $p > n$? Aucune...)

2 Coefficients binômiaux

Propriétés
1) $C_n^n = C_n^0 = 1$
2) $C_n^p = C_n^{n-p}$
3) $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ ie $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$
4) $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$

preuve
Soit en utilisant $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, soit de manière plus naturelle :

[1] L'exposé a été présenté à Bordeaux(1) en octobre 2004 par Blandine, corrigée par M.A, et a été tapé par Gwendal Haudebourg. Mise à jour le 31/07/2007

1) Combien y a t-il de parties à 0 éléments dans n-éléments ? Il y en a une seule (celle qui ne contient aucun éléments) d'où le résultat
2) A chaque fois que je choisis une partie à p-éléments, il lui correspond une partie à $n-p$ éléments.
3) Soit E, $|E| = n+1$, $a \in E$ fixé. Alors toute partie de E à p éléments est soit une partie de $E - \{a\}$ à p éléments, soit $\{a\} \cup P$ où $|P| = p-1$ et $a \notin P$

remarque : La relation 3) fournit un moyen de calculer "de proche en proche" les coefficients C_n^p permettant de construire le triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal
Les nombres réels C_n^p sont généralement présentés dans un tableau triangulaire où n est l'indice de ligne et p l'indice de colonne. Il se contruit de proche en proche grâce aux valeurs $C_n^0 = C_n^n = 1$ et grâce à la relation $C_n^p + C_n^{p+1} = C_n^{p+1}$. Ce tableau est appelé triangle de Pascal.

Théorème 2 (Formule du binôme de Newton)
Si a et b sont deux éléments qui commutent entres eux, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

preuve
Soit par récurrence (mais pour cette preuve, il faut connaître la formule avant de la démontrer) : $n = 0$ évident, on suppose la relation ci-dessus. Puis :

$$(a+b)^{n+1} = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k})(a+b) = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k}) + (\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1})$$

$$= (\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k}) + (\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1}) + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= (\sum_{k=0}^{n-1} (C_n^k + C_n^{k+1}) a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{k+1} b^{n-k}$$

Soit plus naturellement, par le dénombrement :
$(a+b)^n = (a+b)...(a+b)$ les termes du second membres sont de la forme $a^k b^{n-k}$ (*si on prend a k-fois, on prend nécessairement b* $n-k$ *fois*)
Le terme a^k est choisi dans k facteur parmi n éléments, il y a C_k^n façon de placer ces éléments, donc le second membre est $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.

3 Applications

3.1 Jeu de cartes

Soit un jeu de 32 cartes. On appelle main un ensemble de 5 cartes.
(i) Combien y a t-il de mains différentes ?
(ii) Combien y a t-il de mains à 3 coeurs et 2 trèfes ?
(iii) Combien y a t-il de mains à au moins 2 carreaux ?
(iv) Combien peut-on déterminer de mains de 5 cartes contenant exactement 1 roi et 2 dames ?
Solutions : (i) $C_{32}^5 (ii) C_8^3.C_8^2$ (iii) on passe par le complémentaire (avoir exactement 0 carreau ou exactement 1 carreau) : $C_{32}^5 - (C_8^0.C_{24}^5 + C_8^1.C_{24}^4)$ (iv) $C_4^1.C_4^2.C_{24}^2 = 6624$ (*32-8=24 les autres cartes examinées ne sont ni des rois, ni des dames...*).

3.2 Pile de boulets

Combien existe t-il de boulets sphériques dans une pile de forme pyramidale, dont la base est un triangle équilatéral de n boulets de côtés ?
solution : la base contient $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$ donc
$C_{n+1}^2 + C_n^2 + ... + C_2^2 = C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 = C_{n+2}^3$ boulets. On a quand même besoin de (i) :

$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$$

preuve de (i) : on a $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p = C_{n-1}^{p+1} + C_{n-1}^p + C_n^p = C_{n-2}^{p+1} + C_{n-2}^p + C_{n-1}^p + C_n^p = ... = \sum_{k=p}^n C_k^p$ (le faire proprement par récurrence).
on peut aussi le démontrer par le dénombrement (plus intuitif, mais pas évident...)

3.3 Trigonométrie

: $\forall \in \mathbb{N}$, $\cos(nx)$ peut s'écrire sous la forme de degré n en $\cos(x)$.

preuve : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx)+i\sin(nx) = (\cos(x)+\sin(x))^n$ (formule de Moivre) $= \Sigma_{k=0}^n C_n^k (\cos(x))^{n-k}(i\sin(x))^k$ (formule du binôme) $= \Sigma_{k=0}^n C_n^k (\cos(x))^{n-k}(i)^k(\sin(x))^k$
En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient : $\cos(nx) = \Sigma_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2k}(-1)^{2k}(\sin(x))^{2k}(\cos(x))^{n-2k}$
$= \Sigma_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2k}(-1)^{2k}(1-\cos(x))^{2k}(\cos(x))^{n-2k}$
Remarque : on a un résultat analogue pour la fonction sin

3.4 Inégalité de Bernouilli

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\forall \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$

preuve : $(1+x)^n = \Sigma_{k=0}^n x^k = 1 + nx + ... \geq 1 + nx$ car $x \geq 0$

3.5 Formule de Leibniz

cf. leçon 75 : $(fg)^n = \Sigma_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

3.6 Le petit théorème de Fermat

Théorème : soit p un nombre premier. Alors $\forall a \in \mathbb{N}$, $a^p \equiv [p]$

preuve : $C_p^k = \dfrac{p!}{(p-k)!k!}$ pour tout $k \in 0, ..., p$ et $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$ par (4), donc $p|kC_p^k$. Or $pgcd(p,k) = 1$ pour $k < p$ donc $p|C_p^k$ (lemme de Gauss).
Montrons maintenant par récurrence le théorème de Fermat :
-pour $a = 0$ ok
-supposons la propriété vraie jusqu'au rang p (récurrence forte). Alors $(a+1)^p = \Sigma_{k=0}^p C_p^k a^k = 1 + a^p + C_p^1 a + ... + C_p^{p-1} a^{p-1} = (1 + a^p)\,[p]$ (par l'HR, et car $p|C_p^k$) $= (1+a)\,[p]$ (par l'hypothèse au rang p).
Donc la propriété est vraie au rang $p+1$. Donc par le théorème de récurrence, la propriété est vraie pour tout $a \in \mathbb{N}$
Remarque : marche aussi pour $A \in \mathbb{Z}$

4 Questions-Compléments