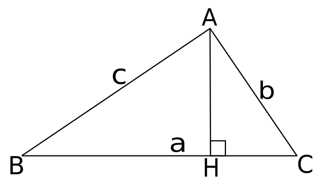
Exposé 37 : Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.

Prérequis[1] :
-Produit scalaire
-Théorème de la médiane
-Théorème de Thalès

Cadre : on se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$
On considèrera des triangles nons applatis suivant :



RAPPELS : Soient $A,B,C \in \mathcal{P}$. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (AB)$ et (AC) perpendiculaire $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ orthogonaux.

Définition (TRIANGLE RECTANGLE)
Un triangle ABC est dit rectangle en A si(si) l'angle $\hat{A}$ est droit.
Les deux autres angles sont alors complémentaires (leurs somme=$\frac{\pi}{2}$) ; le côté opposé à l'angle droit est appelé hypothénuse.

1 Relations métriques dans un triangle rectangle

1.1 Théorème de Pythagore

Théorème (DE PYTHAGORE)
Soit ABC un triangle. ABC est un triangle rectangle sisi $a^2 = b^2 + c^2$

preuve (PRODUIT SCALAIRE)
D'après le théorème de Chasles, on a $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ donc $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}$
Or (AC) et (AB) perpendiculaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA}) = 0$ d'où l'équivalence cherchée.

Beaucoup d'autres preuves existent : Bhaskara, mathématicien Indien, XII^e siècle, puzzle chinois, Abraham Garfield (trapèze), etc (voir annexes)

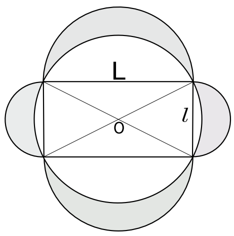
[1]L'exposé a été présenté à Bordeaux(1) en 2004, tapé par Gwendal Haudebourg. Mis à jour le 31/07/2007.

1.2 Médiane issue du sommet de l'angle droit

Proposition : soit I le milieu de $[BC]$. ABC est un triangle rectangle $\Leftrightarrow AI = \dfrac{BC}{2}$

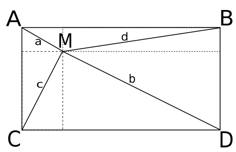
preuve : soit I le milieu de $[BC]$. Le théorème de la médiane donne $b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AI^2$. Par suite (avec le théorème de Pythagore), si ABC est rectangle en A, alors $AI = \dfrac{a}{2}$; si $AI = \dfrac{a}{2}$, alors $a^2 = b^2 + c^2$ et le triangle est rectangle en A.

Corollaire : un triangle est rectangle sisi la longueur d'une médiane est égale à la moitié de la longueur du côté opposé (ie si ce triangle est inscrit dans un demi-cercle).

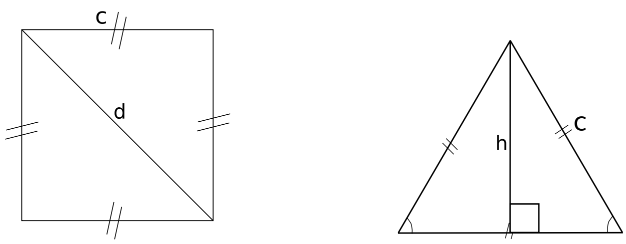


Exercice 1 : Lunules d'Hippocrate : l'aire de la surface grisée est égale à celle du rectangle.
aire du rectangle=$L.l$, diamètre du grand cercle C_1 : $c = \sqrt{L^2 + l^2}$ (Pythagore) ; diamètre de C_2 : L ; diamètre de C_3 : l. Donc aire grisée=$\pi.L^2 + \pi.l^2 - \pi.c^2 + L.l = ... = L.l$

Exercice 2 : L'aire d'une couronne circulaire est égale à celle d'un disque de diamètre une corde du cercle extérieur, tangente au cercle intérieur.



Exercice 3 : Pour M intérieur au rectangle $ABCD$, on a $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
$a^2 + b^2 = x^2 + (AC - y)^2 + y^2 + (BC - x)^2 = x^2 + y^2 + (AC - y)^2 + (BC - x)^2 = c^2 + d^2$



Exercice 4 : Calculer la hauteur d'un triangle équilatéral et la diagonale d'un carré de côtés donnés.
$d^2 = 2c^2$ donc $d = \sqrt{2}c$ pour construire $\sqrt{2}$; $h^2 + (\dfrac{c}{2})^2 = c^2$ d'où $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.c$ pour construire $\sqrt{3}$, $h = \sqrt{2}$ et construction d'un triangle équilatéral.

Théorème : si le plan est rapporté à un repère orthonormal, la distance entre les deux points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ est $d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 - (y - y')^2}$.

preuve : pythagore

Proposition : soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow AB.AC = BC.AH$

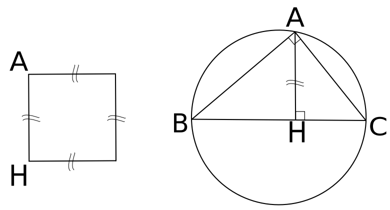
preuve : deux façons différentes de calculer l'aire du triangle ABC.

Proposition : soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow AH^2 = \overline{BH}.\overline{HC} = -\overline{HB}.\overline{HC}$

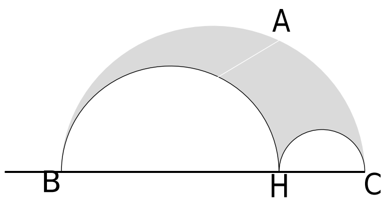
preuve : dans ABC quelconque, on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}).(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}) = AH^2+\overline{BH}.\overline{HC}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AH} = AH^2 + \overline{BH}.\overline{HC}$.

Proposition :
Soit H la hauteur de ABC issue de A. Alors on a l'équivalence : ABC rectangle en $A \Leftrightarrow (H \in [BC]$ et $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2})$

preuve :
($\Rightarrow$)Si le triangle ABC est rectangle en A, alors H est entre B et C, et en élevant au carré la relation $AB.AC = BC.AH$, il vient $AB^2.AC^2 = BC^2.AH^2$, puis par le théorème de Pythagore, $AB^2.AC^2 = (AB^2 + AC^2).AH^2$ d'où la relation voulue.
($\Leftarrow$) Comme cette relation détermine la longueur A, si l'on se donne les longueurs AH et AB, pour A,H et B fixés avec (AH) perp. à (HB), il existe un seul point C situé sur (HB), avec H entre B et C vérifiant cette relation, et comme celui tq. ABC soit rectangle en A convient, c'est celui dont il s'agit.



Construction : trouver un carré équivalent (en aire) à un rectangle donné.
$AH^2 = \overline{BH}.\overline{HC}$



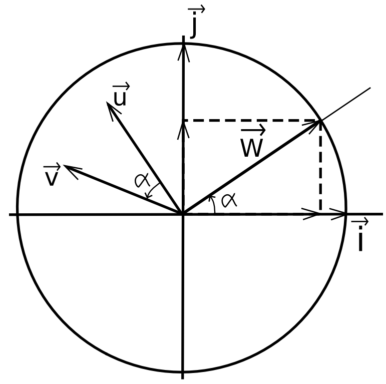
Exercice 5 : Montrer que la partie grisée (orbelon d'Archimède) ci-dessous a même aire que le disque. ABC rectangle en A. $AH^2 = \overline{BH}.\overline{BC} = BH^2 + AB^2 = AC^2 + HC^2$

Exercice 6 : Un segment de longueur l étant donné, construire un segment de longueur $\sqrt{l}$.

2 Trigonométrie

On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.

2.1 Rapports trigonométriques



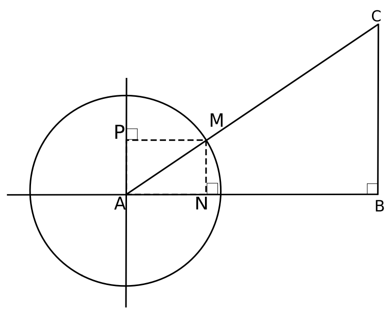
Proposition :
Soient deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls. Il existe un unique vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que :
$(\vec{i}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v})\,[2\pi]$

Définition :
Les composantes de $\vec{w}$ sont appellées respectivement *cosinus* et *sinus* de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, et notés : $cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $sin(\vec{u}, \vec{v})$.
$\vec{w} = cos(\vec{u}, \vec{v}).\vec{i} + sin(\vec{u}, \vec{v}).\vec{j}$

Proposition :
Soient deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls. Alors $cos(\vec{v}, \vec{u}) = cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $sin(\vec{v}, \vec{u}) = -sin(\vec{u}, \vec{v})$

Définition :
Soit un triangle *ABC* rectangle en *B*. On appelle *cosinus* de Â et *sinus* de Â, notés resp. *cos*(Â) et *sin*(Â), les composantes de celui des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ qui a un *sinus* positif.

Proposition :
Dans un triangle *ABC* rectangle en *B*, on a : $cos(\hat{A}) = \dfrac{AB}{AC}$ et $sin(\hat{A}) = \dfrac{BC}{AC}$



preuve : soit C le cercle trigonométrique centré au sommet *A* du triangle rectangle *ABC*, *M* son intersection avec [*AC*], *N* la projection de *M* sur (*AB*). Le théorème de Thalès donne $\cos\hat{A} = \dfrac{AN}{AM} = \dfrac{AB}{AC}$ et $\sin\hat{A} = \dfrac{MN}{AM} = \dfrac{BC}{AC}$

Définition :
Dans un triangle *ABC* rectangle en *B*, le rapport $\dfrac{BC}{AB}$ est appelé tangente de Â, et noté $\tan\hat{A}$.

Proposition :
(i) $sin(\hat{A})= cos(\hat{C})= \dfrac{BC}{AC}$ et $cos(\hat{A})= sin(\hat{C})= \dfrac{AB}{AC}$
(ii) $(sin(\hat{A}))^2 + (cos(\hat{A}))^2 = 1$ et $tan(\hat{A})= \dfrac{sin(A)}{cos(A)}$

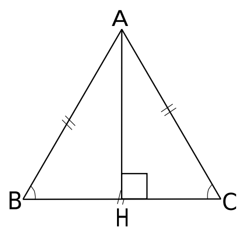
preuve : cercle trigo. ou $\dfrac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = AC^2 AC^2 = 1$

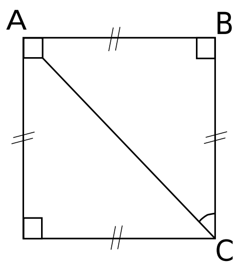
Proposition : soit ABC un triangle rectangle quelconque, H le pied de la hauteur issue de A. On a $AH = AB.sin(\hat{B})= AC.sin(\hat{C})$

Proposition : l'aire d'un triangle rectangle quelconque ABC est $\frac{1}{2}BC.BA.sin(\hat{B})=\frac{1}{2}CA.CB.sin(\hat{C})$

2.2 Angles remarquables et rapports trigonométriques

Proposition : $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$





preuve : dans un triangle équilatéral, les trois angles sont égaux à $\frac{\pi}{3}$. $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{CH}{CA} = \frac{CA}{2CA} = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{AH}{AC} = \frac{\sqrt{3}AC}{2AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Dans un carré : diagonale (angle=$\frac{pi}{4}$) d'où $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{\sqrt{2}BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{\sqrt{2}AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 Applications

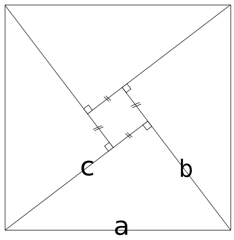
3.1 Triplets pythagoriciens

Ce sont les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ vérifiant la relation : $x^2 + y^2 = z^2$. ex : $(3, 4, 5)$ et $(12, 5, 13)$
<u>Exercice</u> : si $n^2 = 2p + 1$, montrez que $(p, n, p + 1)$ est un triplet pythagoricien
preuve : $n^2 + p^2 = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2$ (Pythagore)

4 Annexes

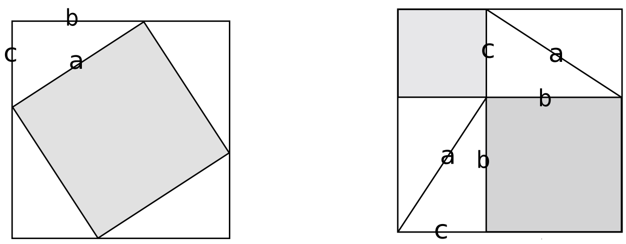
4.1 Théorème de Pythagore : autres preuves

4.1.1 Bhaskara



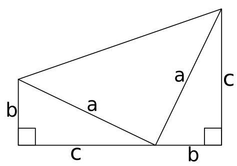
Bhaskara, mathématicien Indien, XII^e
aire du carré=aire des quatres triangles+aire du petit carré
$a^2 = 4(\frac{1}{2}bc) + (b-c)^2$ d'où $a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2$ d'où $a^2 = b^2 + c^2$

4.1.2 Découpage



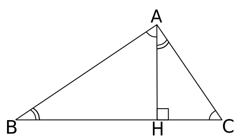
On part de deux carrés d'aires égales, et à gauche on a enlevé quatre fois le triangle (ABC), et à droite également. Les aires sont donc égales : $a^2 = b^2 + c^2$

4.1.3 Trapèze



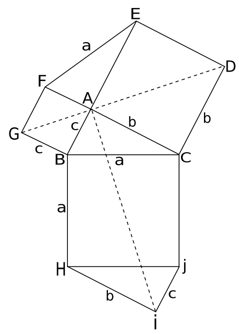
James Abraham Garfield (1832-1881) : président des Etats-Unis en 1881, assasiné au bout de trois mois de présidence...
aire trapèze=$\frac{1}{2}(b+c)(b+c) = 2.\frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2$ d'où $a^2 = b^2 + c^2$

4.1.4 Triangles semblables



ABC (et AHC) et AHB sont deux triangles semblables, car leurs trois angles sont égaux, donc $\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AB}$ d'où $AB^2 = BH.BC$. De même $AB^2 + AC^2 = (BH + HC).BC = BC.BC = BC^2$

4.1.5 Symétrie-Rotation



Léonard de Vinci : (1452-1519)
aire(GDEF)=aire(GBCD) : symétrie d'axe (GD)
aire(ABHI)=aire(AIJC) : symétrie d'axe (AI)
aire(GBCD)=aire(IJCA) : rotation centre C d'angle $\frac{\pi}{2}$
donc aire(ABHIJC)=aire(GBCDEF) donc $b^2 + c^2 = a^2$