Exposé 37 : Orthogonalité dans l'espace affine euclidien : droites orthogonales, droite othogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications

Prérequis[1] : -Définition vectorielle de droites et de plans
-Positions relatives de droites et de plans dans l'espace
-Produit scalaire dans l'espace
-Vecteurs orthogonaux et colinéaires

Cadre de l'exposé : $(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}})$ espace affine euclidien de dimension 3.

1 Droites orthogonales

Définition 1 : Deux droites $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}'(B, \overrightarrow{v})$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. Notation : $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$

remarque : cette définition est cohérente car la nullité du produit scalaire ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs.

Proposition 1 : (1) $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'' \perp \mathcal{D}' \Rightarrow \mathcal{D}'' \parallel \mathcal{D}'$
(2) Dans le plan, si $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D}'' \Rightarrow \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$

remarque : la proposition (1-2) n'est pas vraie dans l'espace

2 Droite orthogonale à un plan

Définition 2 : $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{P}(O, \overrightarrow{n})$ sont orthogonaux si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. On note alors $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$

Proposition 2 : une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

<u>preuve</u> : $(\Rightarrow)$ on a : $\mathcal{P} \perp \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Soient $O, A, B \in \mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{OB}$,
donc $\overrightarrow{u \perp OA}$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{OB}$, donc $\mathcal{D} \perp (OA)$, $\mathcal{D} \perp (OB)$.
$(\Leftarrow)$: soit $\mathcal{D}(O, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}'(O', \overrightarrow{n})$ où $(O, O') \in \mathcal{P}$, $O \neq O'$, et $\mathcal{D}$ orthogonale à deux droites sécantes $d_1(A_1, \overrightarrow{u1})$ et $d_2(A_2, \overrightarrow{u2})$ de $\mathcal{P}$. Il est clair que $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathcal{P}$ (car toute droite du plan a pour vecteur directeur $a.d_1 + b.d_2$), de même pour $\mathcal{D}'$. Les droite $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc coplanaires, et $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ (en appliquant la proposition (1-2) dans le plan), d'où le résultat. $d_1(\overrightarrow{u1}$ □

Corollaire 1 :
(i) $(\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}', \mathcal{D} \perp \mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{D}' \perp \mathcal{P}$
(ii) $(\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}', \mathcal{D} \perp \mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{D} \perp \mathcal{P}'$

[1] Tapé par Gwendal le 10/01/2007. Réalisé avec LaTeX, Inkscape pour les dessins. Cet exposé n'est qu'une ébauche.

Propriétés :
(1) Il existe un unique plan $\mathcal{P}$ passant par un point A donné et orthogonal à une droite $\mathcal{D}$ donnée. Ce plan s'appelle le plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par A.
(2) Il existe une unique droite $\mathcal{D}$ passant par un point A donné et orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ donné. Cette droite s'appelle la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A.

Corollaire 2 :
(i) $(\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' , \mathcal{P} \perp \mathcal{D}') \Rightarrow \mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$
(ii) $(\mathcal{D} \perp \mathcal{P} , \mathcal{D} \perp \mathcal{P}') \Rightarrow \mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$
(iii) $(\mathcal{D} \perp \mathcal{P} , \mathcal{D}' \parallel \mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{D}' \perp \mathcal{D}$
(iv) $(\mathcal{D} \perp \mathcal{P} , \mathcal{D}' \perp \mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$
(v) $\mathcal{D} \perp \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ où $\mathcal{D}'$ droite quelconque de $\mathcal{P}$

exercice : (1) Montrez que les arrêtes opposés sont deux à deux orthogonales
(2) Montrez que le projeté orthogonal H de O sur (ABC) est l'orhocentre.

3 Plans perpendiculaires

Définition 3 : $\mathcal{P}(O, \overrightarrow{n})$ et $\mathcal{P}'(O', \overrightarrow{n'})$ sont perpendiculaires si $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'}$

Proposition 3 : $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \Leftrightarrow \mathcal{P}$ contient une droite $\mathcal{D}$ tq. $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$

Proposition 4 :
(1) $(\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$ et $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{D} \parallel \mathcal{P}'$
(2) $(\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$ et $\mathcal{D} \parallel \mathcal{P}') \Rightarrow \mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$
(3) $(\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'') \Rightarrow \mathcal{P}' \perp \mathcal{P}''$
(4) $(\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ distincts, $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}'') \Rightarrow \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' \perp \mathcal{P}$

4 Applications

4.1 Théorème des trois perpendiculaires

Soit $M \in \mathcal{E}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $H = proj_{\perp,\mathcal{P}}(M)$ et $K = proj_{\perp,\mathcal{P}}(H)$. Montrez que $K = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$.

preuve : $H = proj_{\perp,\mathcal{P}}(M)$ donc $H \in \mathcal{P}$ et $(MH) \perp \mathcal{P}$, d'où $(MH) \perp \mathcal{D}$ (car$\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$). De même $K = proj_{\perp,\mathcal{P}}(H)$ donc $K \in \mathcal{D}$ et $(KH) \perp \mathcal{D}$, d'où $(MKH) \perp \mathcal{D}$, d'où $\mathcal{D} \perp (MK)$, et $(K \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \perp (MK)) \Rightarrow K = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$ □

4.2 Plan médiateur d'un segment

Proposition 5 : L'ensemble des points équidistants de deux points distincts A et B donnés est le plan passant $I = m[AB]$ et orthogonal à (AB).

Définition 4 : L'ensemble des points équidistants de deux points distincts A et B est appelé le plan médiateur de $[AB]$.

5 Compléments

5.1 Définitions et propriétés possibles

Définition 0 : Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si leurs produit scalaire est nul. On note alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

On peut ajouter une propriété : (3) si $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{P}$, $\exists! \mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$ tq. $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$ et $A \in \mathcal{D}'$
Dans le (II) : autre définition possible de droite orthogonale à un plan

Définition : Si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonales à toute droite du plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est dite orthogonale (ou perpendiculaire) à un plan. On note alors $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$

5.2 Preuves

Voici les preuves que l'on a (souvent) pas le temps de faire en 25 minutes.

preuve (Proposition 6) : soit $\mathcal{P}$ le plan passant par I orthogonal à (AB). Montrons que l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ sont à égale distance de A et B : $MA^2 = MI^2 + IA^2 = MI^2 + IB^2 = MB^2$ (théorème de pythagore).
Réciproquement, si $MA)MB$, alors : $MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$
$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 0$ ie $(MI) \perp (AB)$, d'où $(MI) \parallel (\mathcal{P})$ (cf. Corollaire 2), or (MI) et $\mathcal{P}$ ne sont pas disjoints, donc $(MI) \subset \mathcal{P}$, donc $M \in \mathcal{P}$ $\square$

6 Remarques

Gros problème preuve Proposition 2. Pas de problème si on prend la définition ci-dessus pour droite orthogonale à un plan.