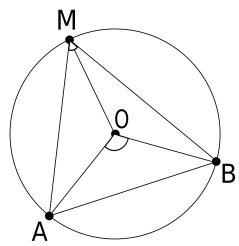
Exposé 36 : Théorème de l'angle inscrit : ensemble des points M du plan tels que l'angle orienté de droites ou de demi-droites (MA,MB) soit constant. Cocyclicité. Applications

Prérequis[1] : -Angle orienté, relation de Chasles
-Pour tout triangle ABC, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\pi\,[2\pi]$

<u>Cadre</u> : on se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$
Le théorème de l'angle inscrit est aussi appelé théorème de l'angle au centre.
Pour bien faire, il aurait fallu marquer chacun des angles par $\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}$ (petit chapeau). Mais c'est un peu long...

1 Théorème de l'angle inscrit(angle au centre)

Théorème 1 : soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, $A,B\in\mathcal{C}$, $A\neq B$. Alors pour tout point $M\in\mathcal{C}$ distinct de A et B, $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\,[2\pi]$



<u>preuve</u> : la somme des angles orientés du triangle MAO est égale à π :
$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}})+(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}})+(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}})=\pi\,[2\pi]$. Or MAO triangle isocèle, donc $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}})$
$=(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}}))\,[2\pi]$ d'où $2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}})+(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}})=\pi\,[2\pi])$.
De même, en considérant le triangle isocèle MOB, on obtient : $2(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}})+(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}})=\pi\,[2\pi]$. En ajoutant ces deux égalités, on obtient :
$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}})+2(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}})+(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}})+(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}})=0\,[2\pi]$ d'ou par la relation de Chasles :
$2(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})+(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})=0\,[2\pi]$. □

remarque : lorsque "l'on met" le point M de l'autre côté, il semble tout d'abord que le théorème est faux modulo 2π. Il n'en est rien ! Il faut faire attention de quel angle il s'agit. Une autre formulation plus claire est : si $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ intersectent le même arc, alors on a la relation voulue...

Corollaire 1 : soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, $A,B\in\mathcal{C}$, $A\neq B$. Alors pour tout point $M,N\in\mathcal{C}$ distinct de A et B, $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{NA},\overrightarrow{NB})\,[\pi]$

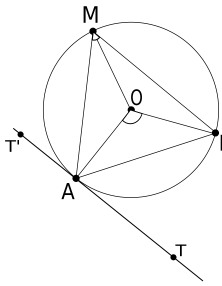
<u>preuve</u> : soient N,M,A,B quatre points distincts cocycliques sur $\mathcal{C}(O,r)$. Alors $2(\widehat{\overrightarrow{NB},\overrightarrow{NA}})$
$=(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})=2(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})\,[\pi]$ par le théorème 1. □

[1]L'exposé a été présenté à Bordeaux(1) en 2004, corrigé par M.C. Tapée par Gwendal, réalisé avec LaTeX. Mise à jour le 26/06/2006.

Définition (ANGLE AU CENTRE, ANGLE INSCRIT) :
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, et A, B distincts de $\mathcal{C}$. Pour tout point $M \in \mathcal{C}$, l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est appelé *angle inscrit* dans $\mathcal{C}$, et l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est appelé *angle au centre* correspondant.

2 Théorème de la tangente

Théorème 2 (DE LA TANGENTE) :
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, $A, B \in \mathcal{C}$, $A \neq B$, et soit Δ_A la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$. Alors :
$T \in \Delta_A - \{A\} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\,[2\pi]$



preuve : $(\Rightarrow)$ Soit $T \in \Delta_A - \{A\}$, soit $A' \in \mathcal{C}$ tel que $[AA']$ diamètre de $\mathcal{C}$. Alors :
$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AA'}) + 2(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB})\,[2\pi] = \pi + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB})\,[2\pi] = \pi + (-\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\,[2\pi]$
$= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\,[2\pi]$
$(\Leftarrow)$ Soit $T^{'} \in \Delta_A - \{A\}$. On a donc $2(\overrightarrow{AT^{'}}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\,[2\pi]$. Si T vérifie
$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\,[2\pi] \Rightarrow 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT^{'}}) = 0\,[2\pi] \Rightarrow \overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{AT^{'}}$ sont colinéaires, donc
$T \in \Delta_A - \{A\}$. $\square$

3 Cocyclicité de quatre points

Théorème 3 (COCYCLICITÉ) :
Soient A, B, C, D quatres points distincts non-alignés A, B, C, D. Alors :
A, B, C, D cocycliques $\Longleftrightarrow (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})\,[\pi]$

preuve :
$(\Rightarrow)$ Soient A, B, C, D quatres points distincts cocycliques. Alors par le corollaire 1, on a
$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})\,[\pi]$
$(\Leftarrow)$ Soit Γ le cercle de centre O passant par A, B, C, Γ' le cercle de centre O' passant par A, B, D (donc $\{A, B\} \subset \Gamma \cap \Gamma'$). Soit $\mathcal{T}_A$ la tangente en A à Γ, $\mathcal{T}'_A$ la tangente en A à Γ', soit $T \in \mathcal{T}_A$, $T \neq A$. Alors
$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\,[2\pi]$ (théorème de la tangente). Or par hypothèse
$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})\,[2\pi]$ (théorème de l'angle inscrit) donc $T \in \mathcal{T}'_A$. D'où $T \in \mathcal{T}_A$, $T \in \mathcal{T}'_A$, $A \in \mathcal{T}_A$ et $A \in \mathcal{T}'_A$ et $T \neq A$, donc $\mathcal{T}'_A = \mathcal{T}_A$. Ainsi les cercles Γ et Γ' ont deux points communs A et B, et une tangente commune au même point A. Ces deux cercles sont donc confondus. $\square$

4 Cercle capable-Arc capable

4.1 Cercle capable

Théorème 4-1 (DU CERCLE CAPABLE)
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, A, B deux points distincts du plan euclidien orienté. Soit
$\mathcal{C}_\alpha = \left\{ M \in \mathcal{P} - \{A, B\}, (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[\pi] \right\}$
Si $\alpha = 0\,[\pi]$, alors $\mathcal{C}_\alpha$ est la droite (AB) privée des points A et B
Si $\alpha \neq 0\,[\pi]$, alors $\mathcal{C}_\alpha$ est $\mathcal{C} - \{A, B\}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle passant par A et B dont la tangente (AT) en A vérifie $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha\,[\pi]$.

Définition (CERCLE CAPABLE) : le cercle ainsi trouvé $\mathcal{C}_\alpha$ est appelé cercle capable d'angle α du couple (A, B).

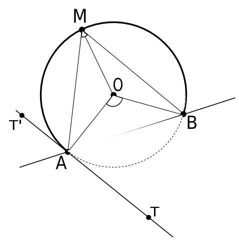
Noter que le point T de la tangente peut-être pris d'un côté ou de l'autre de A sans que cela ne change quoi que ce soit au résultat.

preuve : (pour $\alpha \neq 0\,[\pi]$)
($\Leftarrow$) soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ en question. $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})\,[2\pi]$
$\Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[\pi]$
($\Rightarrow$) Réciproquement, soit $M_O \in \mathcal{C}$ donc $(\overrightarrow{M_OA}, \overrightarrow{M_OB}) = \alpha\,[\pi]$. Soit M tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[\pi]$, donc $(\overrightarrow{M_OA}, \overrightarrow{M_OB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ donc A, B, M_O, M sont cocycliques, donc $M \in \mathcal{C}$ $\square$

4.2 Arc capable

Théorème 4-2 (DE L'ARC CAPABLE) :
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, A, B deux points distincts du plan euclidien orienté et α un réel, soit
$\mathcal{T}_\alpha = \left\{M \in \mathcal{P} - \{A, B\}, (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[2\pi]\right\}$
Si $\alpha = 0\,[2\pi]$, $\mathcal{T}_\alpha = (AB) - [AB]$
Si $\alpha = \pi\,[2\pi]$, $\mathcal{T}_\alpha =]AB[$
Si $\alpha \neq 0\,[\pi]$, alors $\mathcal{T}_\alpha$ est l'arc de cercle ouvert $\widehat{AB}$ du cercle capable $\mathcal{C}_\alpha$ contenu dans le demi-plan ouvert de frontière $\widehat{AB}$ ne contenant pas T (où $\mathcal{T}_A$ est la tangente à $\mathcal{C}_{[A,B]}$ au point A, $T \in \mathcal{T}_A$ tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$=$\alpha\,[2\pi]$).

Définition (ARC CAPABLE) :
Cet arc de cercle ainsi trouvé est appelé arc capable d'angle α du couple (A, B). L'autre arc ouvert $\widehat{AB}$ est l'arc capable d'angle $\alpha + \pi$ ou encore $\alpha - \pi$ du couple (A, B).

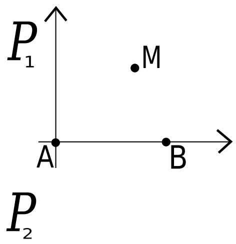


Sur la tangente, T doit être d'un côté de A bien précis, **déterminé par la condition angulaire**.

preuve : on a :
$\mathcal{C}_\alpha := \left\{M \in \mathcal{P}, (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[\pi]\right\} = \left\{M\mathcal{P}, (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[2\pi]\right\} \bigcup \left\{M\mathcal{P}, (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + \pi\,[2\pi]\right\}$
$=: \mathcal{T}_\alpha \bigcup \mathcal{T}_2$
$\mathcal{T}_\alpha$ est donc une partie du cercle $\mathcal{C}_\alpha$ précédemment déterminé.
Or, si la mesure principale d'un angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ défini modulo 2π pour un point $M \in \mathcal{T}_\alpha$ appartient à $]0, \pi[$ (resp. $]-\pi, 0[$), celle d'un angle analogue (pour le même α) pour un point $M' \in \mathcal{T}_2$ appartient à $]-\pi, 0[$ (resp. $]0, \pi[$). Ceci signifie que les angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ pour $M \in \mathcal{T}_\alpha$ et $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$ pour $M' \in \mathcal{T}_2$ sont de sens opposés. Les angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$ étant de même sens (par Chasles), changer de sens pour $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ équivaut à changer de demi-plan défini par la droite (AB) et par le point M.
Ainsi $\mathcal{T}_\alpha$ est l'un des arcs délimité par A et B sur le cercle $\mathcal{T}$, et $\mathcal{T}_2$ est l'autre (il suffit de voir si, modulo 2π, $\alpha \in]0, \pi[$ ou $]-\pi, 0[$) :
Soit $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha\,[2\pi]$. Alors $det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = MA.MB\sin(\alpha)$. De plus[2]
$det(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB})$=$-det(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$=$-AT.AB\sin(\alpha)$ donc $det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $det(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB})$ sont de signes différents, donc par le lemme (qui suit), T et M sont sur les demis-plans différents (au dessus ou en dessous de la droite (AB).
En prenant $T \in \Delta_A$ (tangente au cercle en A) d'un côté précis de A, on en déduit donc $\mathcal{T}_\alpha$. $\square$

[2]pour se convaincre, passer en analytique dans le repère d'origine A : $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $T(x, y)$

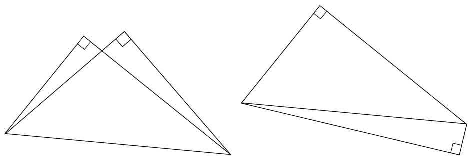
Lemme : $det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ garde un signe constant sur $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, ces deux signes étant opposés, car :
$M(x, y)$ $A(0, 0)$ $B(a, 0)$ $\overrightarrow{MA} = (-x, -y)$ $\overrightarrow{MB} = (a - x, -y)$
$det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = ay = MA.MB \sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (ie ne dépend que de l'ordonnée de M).
Cela sert comme méthode pratique pour voir la position relative de deux points (sont-ils ou non dans le même plan ?).



5 Applications

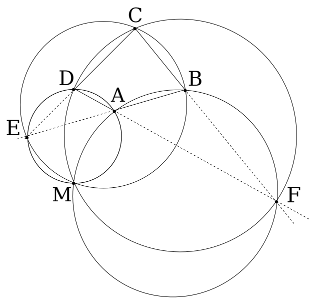
5.1 Les deux configurations de base

Dans les deux cas suivants, les quatres points sont cocycliques



5.2 Point de Miquel

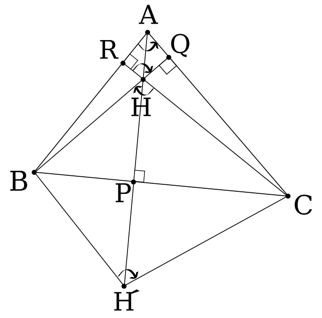
Soit A, B, C, D un quadrilatère convexe. On suppose (AB) et (CD) se coupant en E, et (AD) et (BC) se coupant en F (A, B, C, D, I, J distincts). Alors les cercles circonscrits aux triangles EAD, EBC, FCD et FAB passent par un même point M (point de Miquel) du quadrilatère $ABCD$



preuve : soit M le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{ADE}$ et $\mathcal{C}_{ABF}$ (le premier étant le point A).
Par cocyclicité, on a $(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA})\,[\pi]$ et $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})\,[\pi]$ donc $(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})\,[\pi] = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})\,[\pi] = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB})\,[\pi] = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB})\,[\pi]$ ie $M \in \mathcal{C}_{ECB}$.
De même $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{ME}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})\,[\pi]$ et $(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MD}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})\,[\pi]$ donc
$(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})\,[\pi] = (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{FD})\,[\pi] = (\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FD})\,[\pi]$ $\square$

5.3 Symétrique de l'orthocentre

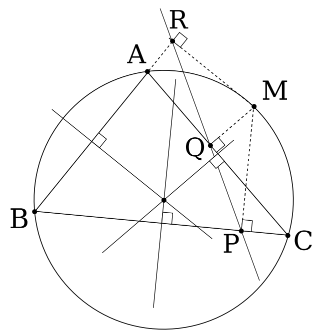
Montrer que le symétrique de l'othocentre H d'un triangle non plat ABC par rapport à un côté du triangle se trouve sur le cercle circonscrit



preuve : soit H' le symétrique de H par rapport à (BC). Alors les angles marqués sur la figure sont égaux à 2π près. En effet, la réflexion inverse les angles orientés, donc
$(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = -(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{HR}, \overrightarrow{HQ})\,[2\pi]$. Or A, R, H, Q cocycliques (configuration de base), donc $(\overrightarrow{HR}, \overrightarrow{HQ})$=$(\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ})\,[\pi]$ d'où $(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}) = (\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ})\,[\pi]$ ie A, B, C, H' cocycliques. □

5.4 Droite de Simson

Soit A, B, C un triangle, soit M un point de $\mathcal{P}$, soient P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur $(BC), (AC)$ et (AB). Alors :
P, Q, R alignés $\iff M \in$ cercle circonscrit à ABC

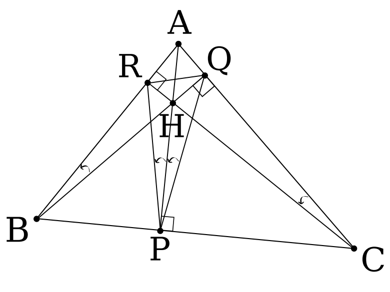


preuve : les points M, P, C, Q sont cocycliques (configuration de base) donc
$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM})$=$(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM})$=$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM})\,[\pi]$. De même B, P, M, R sont cocycliques, donc
$(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR})$=$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BR})$=$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})\,[\pi]$.
Ainsi $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$=$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM})$+$(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR})\,[2\pi]$=$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM})$+$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})\,[\pi]$.
Or $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM})$=$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})\,[\pi] \iff A, M, B, C$ cocycliques d'où l'équivalence cherchée. □

Définition : (PQR) est appelée droite de Simson de M relativement au triangle ABC

5.5 Triangle orthique

Montrer que les côtés et les hauteurs de ABC non-plat sont les bissectrices du triangle RQP formé par les pieds des trois hauteurs de ABC.



Définition : le triangle PQR est appelé triangle orthique de ABC.

preuve : les points B, R, P, H sont cocycliques (configuration de base), de même les points R, Q, B, C et H, Q, C, P sont cocycliques, donc :
$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PA}) = (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PH})\,[2\pi] = (\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CH})\,[\pi]$. De même $(\overrightarrow{BQ}, \overrightarrow{BR}) = (\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CR})\,[\pi]$ et
$(\overrightarrow{PH}, \overrightarrow{PR}) = (\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BR})\,[\pi]$ d'où les angles orientés marqués sur le dessin, d'où le résultat. □

6 Compléments