Exposé 35 : Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.

Prérequis[1] : -Produit scalaire
-Projection orthogonale
-Théorème de pythagore, distance, inégalité triangulaire
-Equation cartésienne d'une droite

Cadre : $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{P}})$ plan affine Euclidien

1 Généralités

1.1 Définitions-Propositions

Définitions (Cercle) : on appelle cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble
$\mathcal{C}(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{P}, \Omega M = R\}$
On dit que $M \in \mathcal{P}$ est à l'intérieur de $\mathcal{C}(\Omega, R)$ si $M\Omega < R$
On dit que $M \in \mathcal{P}$ est à l'extérieur de $\mathcal{C}(\Omega, R)$ si $M\Omega > R$
Deux cercles sont dits concentriques s'ils admettent le même centre.

Définition : Soient $\mathcal{C}(\Omega, A)$. Si $A, B \in \mathcal{C}$, et si $\Omega \in [AB]$, alors $[AB]$ est un diamètre du cercle.

Proposition 1 :
(i) Ω est centre de symétrie de $\mathcal{C}(\Omega, R)$.
(ii) Une droite du plan est axe de symétrie de $\mathcal{C} \Leftrightarrow$ cette droite passe par Ω
(iii) Par trois points $A, B, C \in \mathcal{P}$ non confondus et non alignés, il passe un unique cercle, appelé “cercle concourant à A, B, C”.

Proposition : l'ensemble $\left\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}\right\}$ est le cercle de centre $\Omega = m[AB]$, et de rayon $\dfrac{AB}{2}$

preuve : soit $\Omega = m\,[AB]$. Alors : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{\Omega B}).(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})$
$= M\Omega^2 - \Omega B^2$ donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \Omega M = \Omega B$. □

remarque : il est à noter que la proposition est une autre définition possible du cercle (par son diamètre).

1.2 Equation cartésienne du cercle

Théorème : soit $\mathcal{C}(\Omega, R)$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et de rayon R. Une équation cartésienne du cercle dans ce repère s'écrit : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, avec
$c = a^2 + b^2 - R^2$
Inversement, soit l'ensemble $\Gamma := \left\{M(x, y) \in \mathcal{P}, x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\right\}$ Alors :

1. $\Gamma = \emptyset$ si $c > a^2 + b^2$
2. $\Gamma = \{M(a, b)\}$ si $c = a^2 + b^2$
3. $\Gamma = \mathcal{C}(\Omega, R)$, avec $\Omega(a, b)$ et $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ si $c < a^2 + b^2$

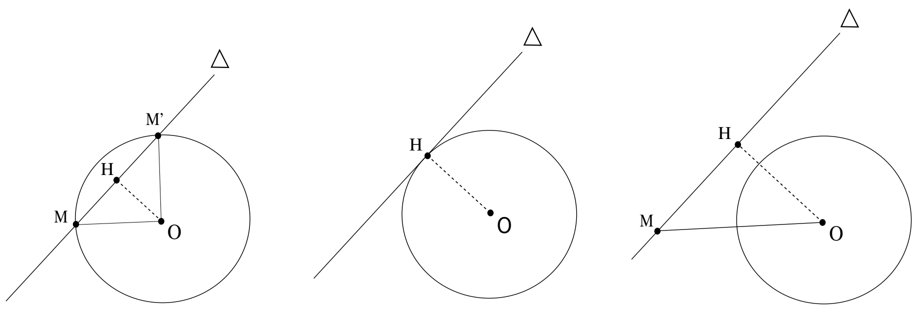
[1] L'exposé a été présenté à Bordeaux(1) en octobre 2004 par Armelle, corrigée par M.P. En italique : juste des petites remarques, infos etc, pour bien comprendre. Totalement inutile à l'oral bien sûr. Tapée par Gwendal, réalisé avec LaTeX. Mise à jour le 12/05/2007.

preuve : soit $\mathcal{C}(\Omega, R)$. Alors $M(x,y) \in \mathcal{C}(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M^2 - R^2 = 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - R^2$. Réciproquement :
$\Gamma = \{M(x,y) \in \mathcal{P}, x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\} = \{M(x,y) \in \mathcal{P}, (x-a)^2 + (y-b)^2 = -c + a^2 + b^2\}$, donc si $\Omega(a,b)$, $M(x,y)$ et $c < a^2 + b^2$, alors $\Omega M^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = -c + a^2 + b^2 = cste > 0$, d'où le résultat. $\square$

2 Position relative entre une droite et un cercle

Soit $\mathcal{C}(\Omega, R)$, $\Delta \in \mathcal{P}$

Proposition 2 :
-si $d(\Omega, \Delta) > R$ alors $\Delta \cap \mathcal{C} = \emptyset$, Δ est extérieur à $\mathcal{C}$
-si $d(\Omega, \Delta) < R$ alors $\Delta \cap \mathcal{C} = \{A, B\}$), Δ et $\mathcal{C}$ sont sécants.
-si $d(\Omega, \Delta) = R$, alors $\Delta \cap \mathcal{C} = \{M\}$



preuve (GÉOMÉTRIQUE) : supposons qu'il existe $M \in \mathcal{C} \cap \Delta$. En notant $d = d(\Omega, \Delta)$ et $H = proj_{\perp, \cdot}(\Omega)$, on a : $\Omega M^2 = R^2 = d^2 + HM^2$ d'où $HM^2 = R^2 - d^2 \geq 0$ d'où $(R-d)(R+d) \geq 0$
-Si $R < d$ alors comme $(R-d) < 0$ or $(R-d)(R+d) \geq 0$ (contradiction), d'où $\mathcal{C} \cap \Delta = \emptyset$
-Si $R = d$ alors $HM^2 = 0$ d'où $H = M$ (H unique, donc M unique), d'où $\mathcal{C} \cap \Delta = \{H\} = \{M\}$
-Si $R > d$ alors $HM = \sqrt{R^2 - d^2}$ (et pas $HM = -\sqrt{R^2 - d^2}$ car il s'agit ici de distances). Soit $M' = s_{(\Omega H)}(M)$, alors $M' \in \mathcal{C}$ (car s isométrie, donc $\Omega H = \Omega H'$), d'où $HM = HM' = \sqrt{R^2 - d^2}$ (théorème de pythagore). Donc $\mathcal{C} \cap \Delta = \{M, M'\}$.
(preuve analytique) Soit le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{\Omega H}}{\|\overrightarrow{\Omega H}\|}$. $M(x,y)$, $H(d,0)$, $\Omega(0,0)$, $\Delta : x = d$. Alors $M \in \mathcal{C} \cap \Delta \Rightarrow (x^2 + y^2 = R^2$ et $x = d) \iff (y^2 = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ et $x = d)$ d'où les deux points $M(d, \sqrt{R^2 - x^2})$ et $M(d, -\sqrt{R^2 - x^2})$. $\square$

Définition : si $d(\Omega, \Delta) = R$ (ie $\Delta \cap \mathcal{P} = \{M\}$), Δ est appelée droite tangent à $\mathcal{C}$ passant par M.

3 Position relative de deux cercles

Théorème (INÉGALITÉ TRIANGULAIRE) : Etant donnés trois réels positifs a, b, c, alors :
il existe un triangle dont les segments des côtés sont de longueurs a,b et c $\iff |b - c| \leq a \leq b + c$.

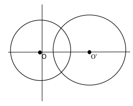
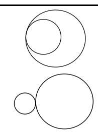
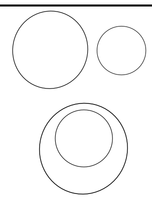
remarques :
(i) Si les inégalités sont strictes, il existe exactement deux triangles symétriques par rapport à $[AB]$
(ii) Si une de ces inégalités est une égalité, il existe un unique triangle : c'est un triangle plat.

3.1 Cercles concentriques

Proposition 3 : soient $\mathcal{C}(O, R)$, $\mathcal{C}'(O, r)$
-si $R = r$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{C} = \mathcal{C}'$
-si $R \neq r$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$

3.2 Cercles non-concentriques

Soient $\mathcal{C}(O,R)$, $\mathcal{C}'(O',r)$, $d = d(O,O')$

Condition	$\mathcal{C}\cap\mathcal{C}'$	Remarques	Dessin
$\lvert R-r\rvert < d < R+r$	2 points	les deux points sont symétriques par rapport à OO'	
$d = \lvert R-r\rvert$ ou $d = R+r$	1 point	$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents (tangents intérieurs ou extérieurs)	
$d < \lvert R-r\rvert$ ou $d > R+r$	$\emptyset$	$\mathcal{C}$ extérieur (ou intérieur) à $\mathcal{C}$	

preuve (PREUVE ANALYTIQUE) : soit $\mathcal{C}(O,R)$, $\mathcal{C}'(O',r)$ (avec $O \neq O'$, donc $d \neq 0$), le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{OO'}}{\|OO'\|}$, $\mathcal{C} : x^2+y^2 = R^2$, $\mathcal{C}' : (x-d)^2+y^2 = r^2$

$$M \in \mathcal{C}\cap\mathcal{C}' \iff \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2 = R^2 \\ (x-d)^2+y^2 = r^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x^2 = R^2-y^2 \\ x^2-2dx+d^2+y^2 = r^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 = R^2 \\ x = \frac{R^2-r^2+d^2}{2d} \end{array}\right.$$

$$M \in \mathcal{C}\cap\mathcal{C}' \iff \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2 = R^2 \\ 4d^2y^2 = (4d^2R^2)-(R^2-r^2+d^2)^2 \end{array}\right.$$

$$M \in \mathcal{C}\cap\mathcal{C}' \iff \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2 = R^2 \\ y^2 = \dfrac{1}{4d^2}(2dR-R^2+r^2-d^2)(2dR+R^2-r^2+d^2) \end{array}\right.$$

$$M \in \mathcal{C}\cap\mathcal{C}' \iff \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2 = R^2 \\ y^2 = \dfrac{1}{4d^2}(R+d-r)(R+d+r)(r-R+d)(R-d+r) \end{array}\right.$$

-Si $R \geq r$, alors $R+d+r > 0$ et $R+d-r > 0$ (faire le même raisonnement si $r \geq R$)
donc ce système a une solution en $y \Leftrightarrow (r-d+R)(r+d-R) \geq 0$ (1)
(1) $\Leftrightarrow$ $(r-d+R \geq 0$ et $r+d-R \geq 0)$ ou $(r-d+R \leq 0$ et $r+d-R \leq 0)$
(1)$\Leftrightarrow$ $(R-r \leq d \leq R+r)$ ou $(R+r \leq d \leq R-r$, ce qui amène à une contradiction)
(1)$\Leftrightarrow$ $R-r \leq d \leq R+r$
Le même raisonnement pour $R \leq r$ nous donne une solution en y si $r-R \leq d \leq R+r$, d'où :

$$M \in \mathcal{C}\cap\mathcal{C}' \iff |R-r| \leq d \leq R+r$$

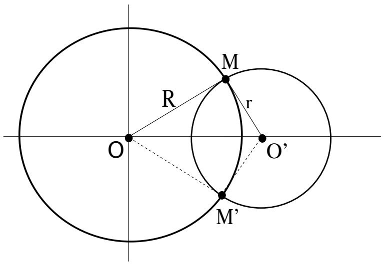
Ainsi :
.Si $|R-r| < d < R+r$, le système a deux solutions distinctes (on trouve deux points M et M' de même abscisse
.Si $d < |R-r|$ ou si $d > R+r$, le système n'a pas de solutions.
.Si $d = |R-r|$ et $R > r$ ie $d = R-r$, on a : $y^2 = 0$ d'où $y = 0$ et $x = R$. Donc le système a une unique solution $M(R,0)$.

d	0		$\lvert R-r\rvert$		$R+r$	
$(R+d-r)(R+d+r)(r-R+d)(r+d-R)$		$-$	0	$+$	0	$-$
nombre de solutions		0	1	2	1	0

$\square$

preuve (PREUVE GÉOMÉTRIQUE) : soit $OM = R$, $O'M = r$ et $OO' = d$.
Supposons qu'il existe un point $M \in \mathcal{C}\cap\mathcal{C}'$. Par l'inégalité sur $OO'M$ (d'après le théorème précédent), on a : $|R-r| \leq d \leq R+r$ (donc par contraposé, si $d < |R-r|$, $\mathcal{C}\cap\mathcal{C}' =\emptyset$). De plus, d'après le théorème

précédent, si ces inégalités sont strictes, il y a deux triangles OMO' et $OM'O'$ (donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{M, M'\}$) et si $d = R - d$ et $d = R + r$ alors il y a un seul triangle OMO' (donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{M\}$). $\square$



4 Compléments

Remarque : dans la preuve analytique, on n'a pas besoin du théorème précédent. Il est par contre nécessaire dans la preuve géométrique.

4.1 Preuves

preuve (Proposition 1) : (i) soit $A \in \mathcal{C}(\Omega, R)$, donc $\Omega A = R$. Soit $A' = s_\Omega(A)$; or la symétrie centrale est une isométrie, donc $\Omega A = s_\Omega(\Omega)s_\Omega(A)$=$\Omega A'$, donc $A' \in \mathcal{C}(\Omega, R)$ et $\mathcal{C}(\Omega, R) \supset s_\Omega(\mathcal{C}(\Omega, R))$.
De plus s_Ω est bijective, donc si $A' \in \mathcal{C}(\Omega, R)$, $\exists! A \in \mathcal{C}(\Omega, R)$ tq. $A' = s_\Omega(A)$ (il suffit de prendre $A \in (A'\Omega)$ tq.$\Omega = m[AA']$, bien existence de la construction, et unicité du point A), donc $\mathcal{C}(\Omega, R) \supset s_\Omega(\mathcal{C}(\Omega, R))$.
(ii) ($\Rightarrow$) soit $M \in \mathcal{C}$, $s_\Delta : M \to M'$ (donc $M' \in \mathcal{C}$, car Δ axe de symétrie du cercle), or Ω centre du cercle, donc $\Omega M = \Omega M'$, donc $\Omega \in med[MM']$, donc $\Omega \in \Delta$.
($\Leftarrow$) soit $M \in \mathcal{C}$, $s_\Delta : M \to M'$. Alors $\Omega M = R = \Omega M'$ (car $\Omega \in med[MM']$), donc $M' \in \mathcal{C}$
(iii) existence : soit M l'intersection des médiatrices de (AB) et (AC) (existe car ABC triangle non applati), donc $MA = MB$ et $MA = MC$, d'où $MB = MC$ ie M appartient à la médiatrice de (BC), et $A, B, C \in \mathcal{C}(M, R)$.
unicité : soit M' centre d'un cercle passant par A, B et C. Alors $M'A = M'B = M'C$ donc $M' \in med[AB], M' \in med[AC]$ et $M' \in med[BC]$, donc M' intersection des médiatrices, donc $M' = M$. $\square$