Exposé 34 : Définitions et propriétés du produit scalaire dans le plan; expression dans une base orthonormale. Application au calcul de distances et d'angles.

Prérequis[1] :
-Notion de distance entre points
-Théorème de Pythagore
-Vecteurs : normes-orthogonalité-colinéarité
-Projections orthogonales
-Base orthogonale
-Angles orientés
-Trigonométrie

Cadre de la leçon : Soit $\mathcal{P}$ plan affine, $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ espace vectoriel associé.

1 Produit scalaire de deux vecteurs

Définition : (Produit scalaire de deux vecteurs)
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} := \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$$

Remarques :
(1) si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$
(2) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geq 0, \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = 0$
(3) on utilise fréquement comme définition : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} := \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2)$

Proposition (et pas définition !) : $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}, \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$

preuve : on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\frac{1}{2}(\|2\overrightarrow{u}\|^2\text{-}\|\overrightarrow{u}\|^2\text{-}\|\overrightarrow{u}\|^2)=\|\overrightarrow{u}\|$ □

Théorème : (Nullité du produit scalaire) Soit $\overrightarrow{u} \neq 0, \overrightarrow{v} \neq 0$. Alors $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, avec par convention $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{0}$.

preuve : Cette preuve ne nécessite aucune propriété du produit scalaire, etc...on a juste besoin de pythagore.

Définition : $\mathcal{P}$ plan affine muni du produit scalaire est appelé plan affine euclidien ; son espace vectoriel associé $\overrightarrow{P}$ espace vectoriel euclidien.

[1]L'exposé a été présenté à Bordeaux(4) le 12/01/2005 par Jean-Louis, a été corrigé par M.C, a été recopié par Gwendal Haudebourg. Mis à jour le 04/06/2006

2 Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Théorème : soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une BON, $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$.

Alors : (i) $\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2$

(ii) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

Corollaire : (1) $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow xx' + yy' = 0$

(2) $x = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{i}$ et $y = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{j}$

2.1 Equation cartésienne dans une base orthonormée

2.1.1 Droite

Théorème : soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ une droite passant par $A(x_0, y_0)$, et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$.
Alors : $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0)$

2.1.2 Cercle

Théorème : (1) soit $\mathcal{C}(O, R)$ où $O(x_0, y_0)$. Alors $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow OM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
(ii) soit $\mathcal{C}[AB]$ où $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$. Alors $M(x, y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x - x_A).(x - x_B) + (y - y_A).(y - y_B) = 0$

3 Propriétés

Pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, on a :

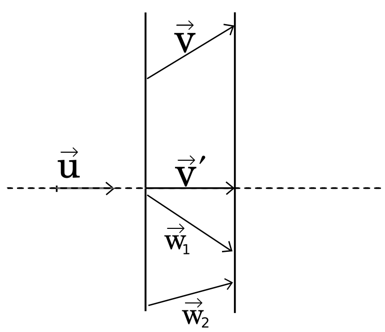
1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (symétrie)
2. $\forall k \in \mathbb{R}, k\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v})$
3. $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
4. $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ (linéaire par rapport au premier vecteur)
5. $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

Inégalité de Cauchy-Schwartz : Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. Alors $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|$ (avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires).

4 Autres expressions du produit scalaire

4.1 Avec le projeté orthogonal

Théorème : Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \neq 0$, $v' = proj_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})$. On a alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v'}$



<u>preuve</u> : $v' = proj_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})$ donc $\overrightarrow{u} \perp (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v'})$ donc $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v'}) = 0$ donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v'}$ □

Conséquence pratique : soient $\vec{u} \neq 0, \vec{v}, \vec{w}$ tels que $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = proj_{\vec{u}}(\vec{w})$, alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$

Corollaire : $proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \dfrac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|^2}.\vec{u}$

<u>preuve</u> : $\vec{v'} = proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \lambda\vec{u}$ donc $\vec{u}.(\vec{v} - \vec{v'}) = 0$, donc $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\lambda\vec{u}$, d'où $\lambda = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}$ □

4.2 Avec le cosinus

Théorème : soient $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

5 Applications

5.1 Inégalité triangulaire

Soient A, B, C trois points distincts. Montrer que $AB \leq AC + CB$

5.2 Distance d'un point à une droite

Théorème : soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$, $M(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$. Alors $d(M, \mathcal{D})$=$\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

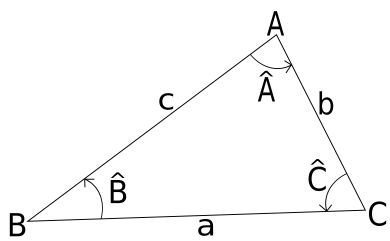
<u>preuve</u> : soit $\vec{n}(a, b)$ vecteur normal)à $\mathcal{D}$, et $H = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$. Alors $\overrightarrow{HM} = HM.\dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$, donc $\dfrac{\overrightarrow{HM}.\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$=$MH$. Or $|\overrightarrow{HM}.\vec{n}|$=$|ax - ax_0 + by - by_0|$=$|ax_0 + by_0 + c|$ et $\|\vec{n}\|$= $\sqrt{a^2 + b^2}$ d'où le résultat. □

remarque : la vraie définition de la distance $d(M, \mathcal{D}$=$inf\{MX, X \in \mathcal{D}\}$. Cet inf existe, et est atteint lorsque $X = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$ par ce qui précède : $MH \leqslant MX + XH$, et XH minimum lorsque $X = H$.

5.3 Al-Kashi

Montrer que :

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B})$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$



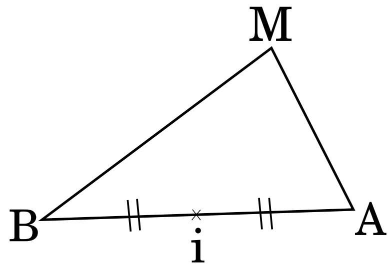
5.4 Quadrilatère ABCD

(1) Montrer que $AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$
(2) En déduire que $(AC) \perp (BD) \iff AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

5.5 Théorème de la médiane

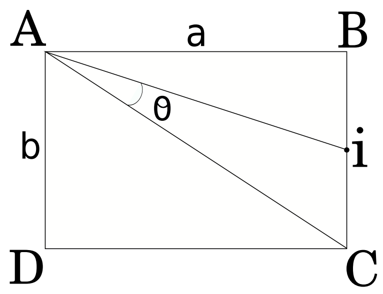
Soient $A, B, M \in \mathcal{P}$, $I = m\,[AB]$

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$
2. Montrer que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$
3. Montrer que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$



5.6 Rectangle

Soit $ABCD$ un rectangle de côté a et b, $I = m[BC]$. Calculer θ



6 Pièges-Questions fréquentes

(0) Que veut dire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ? Comment montrer le corollaire ? etc. Que veut dire que deux droites sont orthogonales ? Si la dem. du I est ok, pas de problème.
(2) Savoir démontrer le théorème de Pythagore sans utiliser le produit scalaire ! (car on s'en sert pour montrer des propriétés du produit scalaire. La preuve peut se faire par le calcul d'aire).
(3) Dans une base non-orthonormée, la notion cartésienne de droite a t-elle un sens ?
Oui, car c'est une notion affine : on définit alors une droite par un point et un vecteur directeur (et pas un point et un vecteur normal à la droite).
(4) On pourrait faire une leçon en partant d'une autre définition du produit scalaire. Ex : c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive, etc...
(5) si les angles sont aigüs, pas de problème d'orientation (pour le cosinus) car il est alors positif (de plus, ne pas oublier que $cos(-x) = cos(x)$).

6.1 Autre définition du produit scalaire

Le programme de première S préconise comme définition : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AC'}$ où $C' = proj_{\perp,(AB)}(C)$

Problème de ce point de vue : la bilinéarité n'est pas absolument évidente à montrer, et la symétrie encore moins...(il faut utiliser Thalès, ou triangles semblables, etc, et on tourne un peu en rond...)

6.2 Norme d'un vecteur

Comment définit-on la norme d'un vecteur ?
Ne pas donner les propriétés qui définisse une norme (forme bilinéaire définie positive, etc...) : beaucoup plus simple : on définit la norme d'un vecteur par la notion de distance (définition affine) : $\|\overrightarrow{u}\| := AB = d(A, B)$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Pour que cette définition soit bien valide, il faut préciser :
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $d(A, B) = d(C, D)$ (évident par la déf. d'un parallélogramme). Ainsi, on n'a plus de problème de représentant pour la définition de norme.
Par cette définition de norme, on evite les cercles vicieux norme-produit scalaire.

6.3 Vecteurs orthogonaux

Que veut dire $\overrightarrow{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{v}$?
Cela veut dire que les droites de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonales.

Que veut dire que deux droites sont orthogonales ?
On a besoin de la notion de médiatrice : $med\,[AB]$=ensemble des points à égales distance de A et de B (donc besoin de la notion de distance). On peut ainsi définir deux droites orthogonales.

Autre méthode : deux droites Δ et Δ' sont orthogonales si Δ' est invariante par la symétrie d'axe Δ (et inversement).

Surtout ne pas dire que deux droites sont orthogonales si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul : on tournerait en rond...

6.4 Cosinus

Comment introduire le cosinus ?
$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$ (définit bien un cosinus d'angle orienté)

6.5 Base orthonormée

Dans le (II) on introduit une base orthonormée. Comment la définir à ce moment là de la leçon ? On l'introduit selon : $\|i\|=\|j\|$ (ça, on peut), et orthogonalité par la définion de la médiatrice (ensemble des points équidistants, etc...).

7 Autres applications

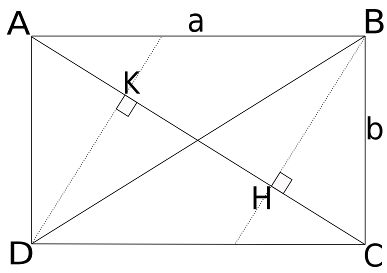
7.1 Formule d'addition

Montrer que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

preuve : Soit le cercle $C(O, 1)$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) = b\,[2\pi]$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}) = a\,[2\pi]$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = a - b\,[2\pi]$, $\overrightarrow{v}(\cos a, \sin a)$, $\overrightarrow{u}(\cos b, \sin b)$. On a $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$, d'où $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\square$

7.2 Distance

Soit $ABCD$ un rectangle. En évaluant de deux façons $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$, montrer que $HK = \dfrac{|a^2 - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

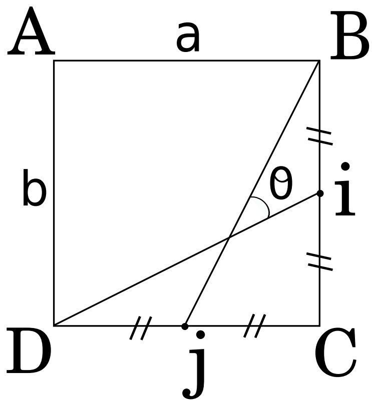


<u>preuve</u> : $||\overrightarrow{KH}|| = ||p_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{DB})||=\frac{|\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}|}{||\overrightarrow{AC}||}$ Or $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{a^2+b^2}$ et

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}).(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})= \sqrt{a^2+b^2}$, d'où $|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}|=|a^2-b^2|$, donc $||\overrightarrow{KH}||=\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ □

7.3 Carré

Calculer θ :



<u>preuve</u> : $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{JB} = ||\overrightarrow{DI}||.||\overrightarrow{JB}||.\cos\theta$, or $DI = JB = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ d'où $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{JB}}{\frac{5}{4}a^2}$

De plus $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{JB}=(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CI}).(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CB})=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=a^2$, donc $\cos\theta = \frac{4}{5}$, et $\theta = \cos^{-1}(\frac{4}{5})$ □

8 preuve

8.1 Al Kashi

<u>preuve</u> : on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$ d'après la définition du produit scalaire (quitte à se placer dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ pour se convaincre). De plus $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}=bc\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, donc
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. □

remarque : souvent on définit Â comme étant "l'angle du triangle" au point A, à condition que les angles du triangle ABC soient tous aigüs (pour éviter les problèmes). Sur le dessin, pas de problème, on a bien pris des angles orientés : on définit Â :=$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

8.2 Quadrilatère ABCD

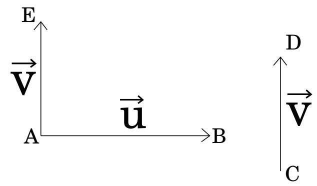
(1) $2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) =2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+2BC^2+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} =2BC^2+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
$=2BC^2+2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =2BC^2+2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DC}-2BA^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$=2BC^2+-2CD^2-2BA^2+2AD^2+2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =-2CD^2-2BA^2+2AD^2+2\overrightarrow{CA}.(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA})+2BC^2$
$=-2CD^2-2BA^2+2AD^2+2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}+2BC^2$
(2) trivial

8.3 Théorème de la médiane

(1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$=$(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$=$MI^2$+$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$+$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}$+$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$
=MI^2-IA^2+$\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA})$=$MI^2$-$IA^2$=$MI^2$-$(\frac{1}{2}AB)^2$=$MI^2$-$\frac{AB^2}{4}$
(2) MA^2+MB^2=$(MB+BA)^2$+(MB^2)=$2MB^2$+BA^2+$2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}$=$2\overrightarrow{MB}.(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA})+BA^2$
=$2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}$+$BA^2$=$2MI^2$-$\frac{AB^2}{2}$+$AB^2$=$2MI^2$+$\frac{AB^2}{2}$
(3) MA^2-MB^2=$(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$=$\overrightarrow{BA}.2\overrightarrow{MI}$=$2.\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

8.4 Théorème du (I)

Si $\vec{u}\neq 0$ et $\vec{v}\neq 0$, soit A,B,C,D,E tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$, $\vec{v'}=\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$. Alors :
$\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow ||u||^2$+$||v||^2$-$||u+v||^2=0\Leftrightarrow AB^2+AE^2-EB^2=0\Leftrightarrow ABE$ rectangle en A ie $\vec{u}\perp\vec{v}$



8.5 Théorème du (II)

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ une BON. On a : $\vec{u}.\vec{v}:=\frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2)$
Soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$, $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$; soient A et B deux points tels que $\vec{u}$=$\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$, donc $A(x,y)$ et $B(x',y')$. Soit $D(x+x';y+y')$ ie $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$
Ainsi $||u||^2$=$d(O,A)$=x^2+y^2 et $||v||^2=d(O,B)=x'^2+y'^2$ et $||\vec{u}+\vec{v}||^2$=$||\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}||^2$=$||\overrightarrow{OD}||^2$=$(x+x')^2+(y+y')^2$, et on obtient : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

8.6 Propriétés du (III)

Toutes ces propriétés sont triviales à montrer avec l'expression analytique du produit scalaire. $\vec{u}(x,y)$, $\vec{v}(x',y')$ et $\vec{w}(x'',y'')$. Alors on a :
(1) $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'=\vec{v}.\vec{u}$
(2) $(k.\vec{u}).\vec{v}$=$kxx'+kyy'$=$k(xx'+yy')$=$k(\vec{u}.\vec{v})$=$\vec{u}.(k.\vec{v})$
(3) trivial par définition du produit scalaire
(4) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$=$x(x'+x'')+y(y'+y'')$=$\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
(5) idem

8.7 Cosinus

Par définition (on prendra des angles aigüs pour simplifier), $cos(\vec{v'},\vec{v})$=$\frac{||\vec{v'}||}{||\vec{v}||}$, et $\vec{v'}=||\vec{v'}||.\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ d'où $\vec{v'}=cos(\vec{v'},\vec{v}).||\vec{v}||.\frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$. Comme $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{v'}$, on a $\vec{u}.\vec{v}$=$||\vec{u}||.||\vec{v}||.cos(\vec{v'},\vec{v})$=$||\vec{u}||.||\vec{v}||.cos(\vec{u},\vec{u'})$