Exposé 33 : Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calcul de distances et d'angles, optimisation...)

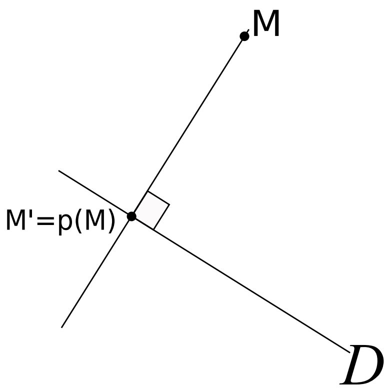
Prérequis[1] :
-Barycentre
-Angles orientés de vecteurs
-Thalès-Pythagore
-Produit scalaire
-Orthogonalité de deux droites

Cadre de la leçon : $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{P}})$ plan affine Euclidien orienté

Rappel : soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $M \in \mathcal{P}$. Il existe un unique droite passant par M et orthogonale à $\mathcal{D}$.

1 Projection orthogonale sur une droite du plan

Définition : (PROJECTION ORTHOGONALE)
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$. On appelle projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ l'application $p : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$
où M' est le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M :
$M' = proj_{\perp,\mathcal{P}}(M)$

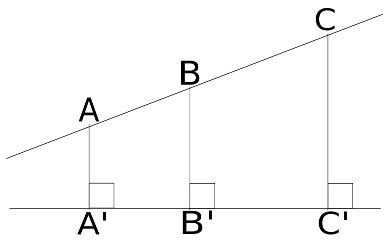


Propriété (1.1) :
(i) $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points fixes de p
(ii) $p \circ p = p$
(iii) Soit $M \in \mathcal{P}$. $p^{-1}(M) = \emptyset$ si $M \notin \mathcal{D}$, soit la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant pas M si $M \in \mathcal{D}$

Propriété (1.2) :
Soit $k \in \mathbb{R}$, $A, B, C \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$. Alors $\overrightarrow{p(A)p(B)} = k.\overrightarrow{p(A)p(C)}$

[1]L'exposé a été présenté à Bordeaux(4) le 10/01/2005 par Johann, a été corrigé par M.C, a été recopié par Gwendal. Réalisé avec LaTeX, Inkscape pour les dessins. Mise à jour le 06/02/2006.

preuve : théorème de Thalès



Corollaire (1.1) : L'application p conserve les barycentres : soit $G = bar\{(M_1, \alpha_1), ..., (M_n, \alpha_n)\}$, $\alpha_1 + ... + \alpha_n \neq 0$, alors $p(G) = bar\{(p(M_1), \alpha_1), ..., (p(M_n), \alpha_n)\}$

preuve (Corollaire 1.1) : par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

Soit $G = bar\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2)\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. On a donc $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} = -\alpha_2 \overrightarrow{GA_2}$, d'où $(\alpha_1 + \alpha_2)\overrightarrow{MG} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2}$. En posant $M = A_1$, on obtient :
$\overrightarrow{A_1G} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\overrightarrow{A_1A_2}$. D'où :
$\overrightarrow{p(A_1)p(G)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\overrightarrow{p(A_1)p(A_2)}$, ie $p(G) = bar\{(p(A_1), \alpha_1), (p(A_2), \alpha_2)\}$.
Le cas général se ramène au cas où $n = 2$ grâce à l'associativité du barycentre :
$\{(M_1, \alpha_1), ..., (M_{n-1}, \alpha_{n-1}), (M_n, \alpha_n)\} = \{(H_1, \alpha_1 + ... + \alpha_{n-1}), (M_n, \alpha_n)\}$, avec $\alpha_1 + ... + \alpha_{n-1} \neq 0$ (en fait, rien ne nous dit que cette somme est différente de 0, mais on sait qu'il existe une sous-famille à $n - 1$ éléments tels la somme de leurs coefs. soit différente de 0, car sinon, cela implique $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 0$, d'où la contradiction). $\square$

conséquences : l'application p est une application affine, l'image d'une droite par p est une droite.

2 Projection vectorielle associée à p

Définition-Théorème (2.1) :
Soit p la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$; l'application $\Pi : \begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{P}} & \to & \vec{\mathcal{P}} \\ \overrightarrow{AB} & \mapsto & \overrightarrow{p(A)p(B)} \end{array}$ est appelée projection vectorielle associée à p.

De plus, Π est bien définie, linéaire, et $\Pi \circ \Pi = \Pi$

preuve :
(1) Montrons que Π est bien définie sur l'image $\overrightarrow{AB}$, car ne dépendant que du vecteur $\overrightarrow{AB}$, et non du choix des points A et B. Il faut donc montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{p(C)p(D)}$. Or :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ par définition du parallélogramme.
Donc, d'après le Corollaire 1, $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{p(C)p(D)} \Leftrightarrow \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, donc Π est bien définie.
(2) $\forall A, B, C \in P$, on a $\Pi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \Pi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{p(A)p(C)} = \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{p(B)p(C)} = \Pi(\overrightarrow{AB}) + \Pi(\overrightarrow{BC})$. Π est donc bien linéaire. $\square$

Proposition (2.1) :
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Tout vecteur $\vec{u} \in \vec{P}$ se décompose de manière unique $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$, où $\vec{u_1} \in \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{u_2} \in \vec{\mathcal{D}}^\perp$ (ie $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{D}} \oplus \vec{\mathcal{D}}^\perp$).

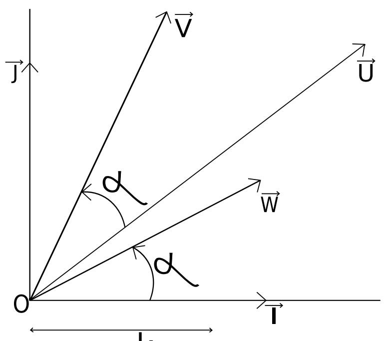
preuve : On a besoin du lemme suivant : $Ker(\Pi) = \vec{\mathcal{D}}^\perp$ (preuve du lemme à faire).
Soit Π la projection vectorielle associée à p.
existence : soit $\vec{u_1} = \Pi(\vec{u})$, $\vec{u_2} = \vec{u} - \Pi(\vec{u})$. Par définition de Π, on a bien $\vec{u_1} \in \vec{\mathcal{D}}$.
$\Pi(\vec{u}) = \Pi(\Pi(\vec{u}) + \vec{u} - \Pi(\vec{u})) = \Pi \circ \Pi(\vec{u}) + \Pi(\vec{u} - \Pi(\vec{u})) = \Pi(\vec{u}) + \Pi(\vec{u_2}) \Rightarrow \Pi(\vec{u_2}) = 0 \Rightarrow \vec{u_2} \in \vec{\mathcal{D}}^\perp$.
unicité : par l'absurde $\square$

3 Applications

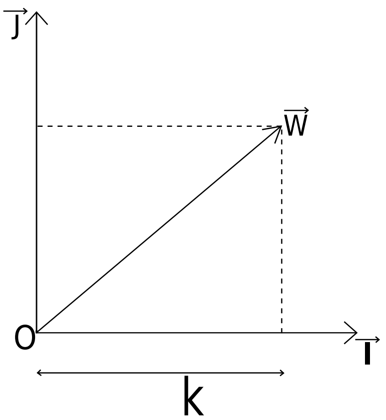
3.1 Cosinus d'un angle de deux vecteurs

Proposition (3.1) :

1. soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls $\in P$. Il existe un unique vecteur **unitaire** $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{w})[2\pi]$
2. si p est la projection orthogonale sur la droite (Ox), il existe un unique $k \in \mathbb{R}$ tel que $\Pi(\vec{w}) = k.\vec{i}$



(1)



(2)

Définition : le nombre k définit ci-dessus ne dépend que de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et est appelé *cosinus* de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

Proposition (3.2) : soit D une demi-droite d'origine O, $\alpha = (\widehat{[Ox), \mathcal{D}})$. $\forall M \in \mathcal{D}$, et $H = proj_{\perp,(Ox)}(M)$, on a : $\overrightarrow{OM} = cos(\alpha).\overrightarrow{OM}$

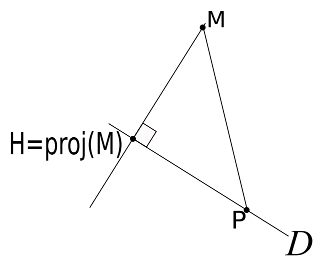
3.2 Distance

Proposition (3.3) : soit $M \in \mathcal{P}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $H = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$. Alors $\forall P \in \mathcal{P}$, $P \neq H$, on a : $MH < MP$

Définition : on définit la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$ comme étant : $d(M, \mathcal{D}) = inf(MP)_{P\in\mathcal{D}}$

Proposition (3.4) : on a : $d(M, \mathcal{D}) = inf(MP)_{P\in\mathcal{D}}$=$d(M, \mathcal{D}) = MH = min(MP)_{P\in\mathcal{D}}$

preuve : par la proposition (3.4)



Exercices 1 et 2 :

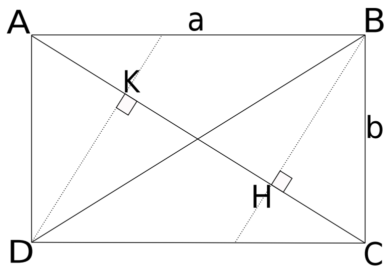
1. déterminer la distance d'un cercle à un droite
2. calcul de $d(M, \mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$: $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et $M(x_0, y_0)$

3.3 Optimisation

exercice 3 : soit $A, B \in \mathcal{P}$ tel que $A \neq B$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$
Trouver $M \in \mathcal{D}$ tel que $MA^2 + MB^2$ soit minimale

exercice 4 : soit $ABCD$ un rectangle inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.
Montrer que l'aire $ABCD$ est maximale lorsque $ABCD$ est un carré.

exercice 5 : soit $ABCD$ un rectangle. En évaluant de deux façons $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$, montrer que $HK = \dfrac{|a^2 - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



3.4 Divers-Questions fréquentes

Généralisation de l'exercice 3 : soit $\mathcal{D}$ une droite, $A, B, C \in \mathcal{P}$, (α, β, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
Comment choisir M sur $\mathcal{D}$ tel que $\alpha.MA^2 + \beta.MB^2 + \gamma.MC^2$ soit minimale ?
On introduit $G = bar(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$. On a $\alpha.GH^2 + \beta.GB^2 + \gamma.GC^2$
à finir On peut écrire ceci avec autant de points que l'on veut...

Pièges-Questions fréquentes :
(1) Le plus important de la leçon : montrer que Π est bien définie, d'où l'intérêt de montrer le Corollaire 1 assez tôt dans la leçon (sinon, la preuve est beaucoup plus dure, en appliquant Thalès plusieurs fois.
(2) Dans cette leçon, il est important de savoir prouver Thalès sans utiliser les projections (car on se sert de Thalès dans la leçon pour montrer la propriété (1.2)). Il faut donc éviter le cercle vicieux projection-Thalès.
De plus,dans la démonstration de (1.2), il faut faire attention aux cas particuliers : lorsque A, B, C sont alignés (coefs. nuls possibles).
(3) l'application Π est-elle diagonalisable ? Oui, car $min_{\Pi}(x)$ divise $x^2 - x = x(x-1)$ (où $min_{\Pi}(x)$ est le polynôme minimal de Π), car $\Pi^2 = \Pi$. Le pol. minimale de Π est donc scindé simple, donc Π est diagonalisable !
De plus, $\overrightarrow{\mathcal{E}_1} = \overrightarrow{\mathcal{D}}$, $\overrightarrow{\mathcal{E}_2} = \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$, d'où $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{E}_1} \oplus \overrightarrow{\mathcal{E}_2} = \overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$. C'est une autre démonstration possible de la proposition (2.1)