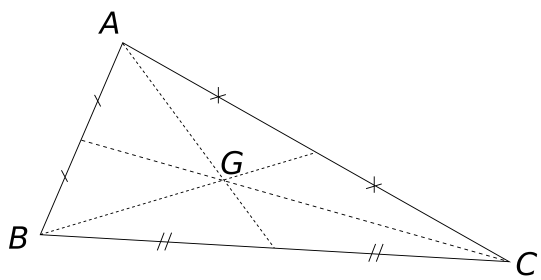
Exposé 31 : Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs, médianes, médiatrices

Prérequis[1] :
-Barycentre
-Réflexions-Homothéties

Cadre : P plan affine Euclidien. On ne travaillera qu'avec des triangles non-applatis ABC, tel que $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.
Niveau : première S

1 Médianes

Définition : (Médiane) On appelle médiane d'un triangle toute droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé à ce sommet.



Théorème 1 : Les médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G isobarycentre du système $\{A, B, C\}$. De plus $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ (où A', B', C' milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$).

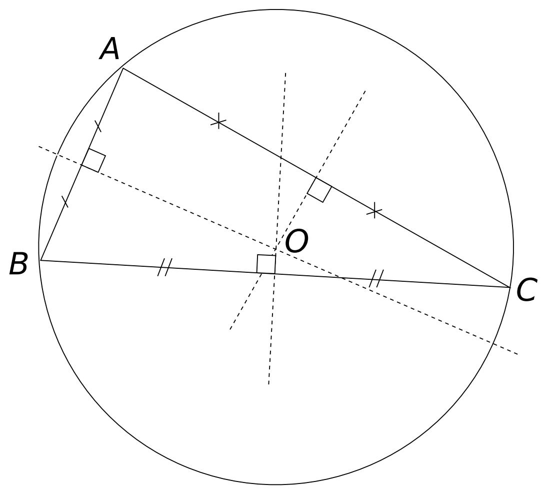
preuve : Soit $G = bar\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$. Alors $G = bar\{(A, 1); (A', 2)\}$, où $A' = bar\{(B, 1); (C, 1)\}$ (associativité du barycentre), donc $G \in (AA')$ et $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, donc par Chasles :
$\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'A}$ (de même $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$, et $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C'C}$.
Plus rapide, sans nommer l'associativité du barycentre : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$,
$\Rightarrow G \in (A'A)$, et $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'A}$, etc. □

remarques :
-Deux médianes ne peuvent pas êtres parallèles (ni confondues) sinon le triangle serait applati.
-Dans cette preuve, il est nécessaire de savoir que $G = bar\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$. D'autres preuves existent (cf. fin exposé).

[1] L'exposé s'inspire très largement d'un exposé présenté par Victor en 2005 à Bordeaux(1), tapé par Gwendal Haudebourg, corrigé par M.C. Mis à jour le 26/01/2006

2 Médiatrices

Définition : (Médiatrices)
Soient A, B deux points du plan euclidien. L'ensemble des points équidistants de A et de B est appelé médiatrice du segment $[AB]$. Les médiatrices d'un triangle ABC du plan euclidien sont les médiatrices des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$.

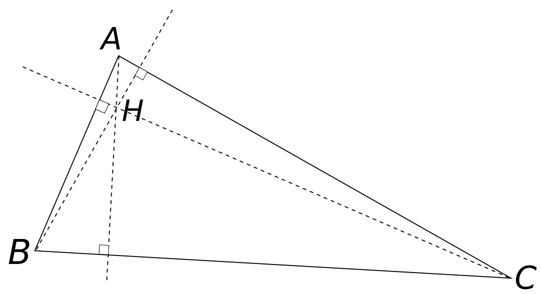


Théorème 2 : Les médiatrices d'un triangle ABC sont concourantes en un point O, centre de l'unique cercle passant par A,B et C (cercle appelé cercle circonscrit au triangle ABC).

preuve : Soient $\Delta_A = med[BC]$, $\Delta_B = med[AC]$, $\Delta_C = med[AB]$. Alors Δ_A et Δ_B sont sécantes en O (car si Δ_A parallèle à Δ_B, alors A, B, C sont alignés), donc on a :
$OB = OC$, $OC = OA \Rightarrow OB = OA$, donc $O \in \Delta_C$.
unicité : $\square$

3 Hauteurs

Définition : (Hauteurs) On appelle hauteur du triangle toute droite passant par un sommet, et perpendiculaire au côté opposé.



Théorème 2 : Les hauteurs d'un triangle ABC (du plan euclidien) sont concourantes en un point H, appelé orthocentre du triangle ABC.
De plus, on a $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$: relation d'Euler (ie les trois points sont alignés + relation vectorielle).

preuve : On suppose connu G et sa position sur les médianes. Soit l'homothétie $h := h_{G,-2}$. On a : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, et h transforme $A'B'C'$ en ABC. En notant $\Delta_A = med[BC]$ (qui passe par A'), $h(\Delta_A)$ est une droite parallèle à Δ_A (car une homothétie transforme une droite en une droite parallèle), et orthog. à

(BC), passant par $h(A') = A$. $h(\Delta_A)$ est donc la hauteur issue de A. Autrement dit, h transforme les médiatrices de ABC en ses hauteurs.
Or les médiatrices Δ_A, Δ_B, et Δ_C se coupent en O ; h étant bijective, on en déduit que les hauteurs sont concourantes en un point noté H ($h(O) =: H$).
La relation $h(O) =: H$ nous donne $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, et $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. $\square$

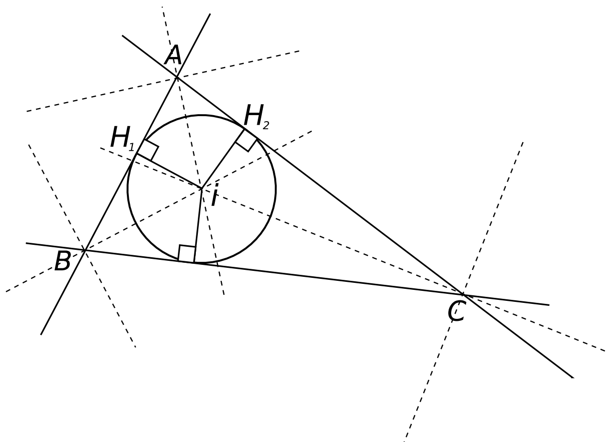
remarque : si ABC non équilatéral, O, G, H sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler du triangle ABC (clair par la relation d'Euler). Mais faire attention : O, G, H alignés $\Leftrightarrow$ ABC équilatéral (exercice)
On peut faire une démonstration constructive (sans connaître G), sans utiliser les homothéties : tracer A_1,B_1,C_1 tel que $(B_1C_1)||(BC)$ passant par A, $(A_1B_1)||(AB)$ passant par C, $(A_1C_1)||(AC)$ passant par B. Montrer que les hauteurs de ABC sont les médiatrices de $A_1B_1C_1$, + théorème 2.

4 Bissectrices

Définition : (Bissectrices)
Les bissectrices d'un couple de droite (D_1, D_2) sont les axes des deux uniques réflexions échangeant D_1 et D_2.
Autrement dit, Δ est bissectrice de $(D_1, D_2) \Leftrightarrow s_\Delta(D_1) = D_2$.

Définition : La bissectrice intérieure (resp. extérieure) issue de A du triangle ABC est l'unique réflexion échangeant les demies-droites $[AB)$ et $[AC)$ (resp. $[AB)$ et $[CA)$).

remarque : autre définition pour la bissectrice extérieure : c'est la perpendiculaire en A à la bissectrice intérieure issue de A



Théorème 3 : Les bissectrices intérieures de ABC se coupent en un point I tel que
$I = bar(A, a), (B, b), (C, c)$, centre du cercle inscrit au triangle (ie I centre du cercle tangent aux trois côtés du triangle).

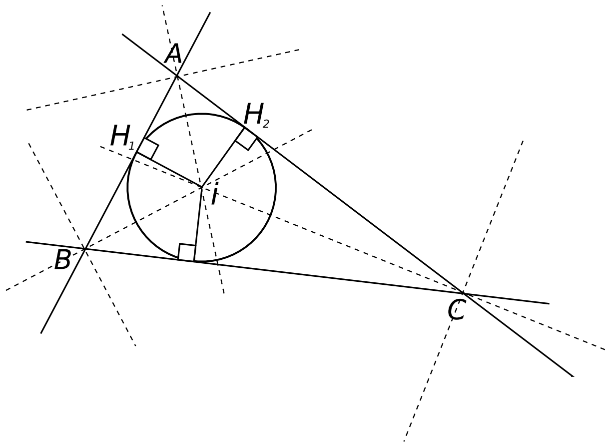
preuve : Soit $I = bar(A, a), (B, b), (C, c)$. On a donc (propr. du barycentre) :
$\forall M \in P, (a + b + c)\overrightarrow{MI} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$
Si $M = A$, $\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$
$APIQ$ est un parallélogramme, et $||\overrightarrow{AP}|| = \frac{bc}{a+b+c} = ||\overrightarrow{AQ}||$, donc $APIQ$ est un losange. Donc (AI) est axe de symétrie des demies-droites $[AC)$ et $[AB)$, et par définition (AI) est la bissectrice intérieure en A de ABC (de même (BI) est la bissectrice intérieure en B de ABC, (CI) est la bissectrice intérieure en C de ABC).
Les bisectrices intérieures du triangle ABC se coupent donc en I où $I = bar(A, a), (B, b), (C, c)$.

Pour montrer que I centre du cercle inscrit au triangle : soit H_1, H_2 le projeté orthogonal de I sur respectivement (AB) et (AC). Alors on a deux triangles rectangles isométriques (deux angles communs et un côté) AH_1I et AH_2I. Donc par le théorème de pythagore $IH_1 = IH_2 =$, donc $d(I,(AB)) = d(I,(AC))$. Par suite $d(I,(AB)) = d(I,(AC)) = d(I,(BC))$, donc I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC. □

remarque : Deux bissectrices ne peuvent pas être parallèles, sinon ABC serait applati.

Exercice : ABC non applati, $J_A = bar\{(A,a);(B,-b);(C,-c)\}$
1) Montrer que J_A est le point de concours de la bissectrice intérieure issue de A et des bissectrices extérieures issues de B et C
2) Montrer que J_A est le centre d'un cercle tangent à (AB), (AC) et (BC)

Définition : J_A est appelé centre du cercle exinscrit dans l'angle $\hat{A}$ du triangle. Il y a également des cercles exinscrits dans les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ (de centres respectifs J_B et J_C).



5 Applications

5.1 Applications

Etant donné trois droites concourantes, construire un triangle ABC telle que ces trois droites soient :
a)Les hauteurs du triangle
b)Les médianes
c)Les médiatrices
d)Les bissectrices (bcp. plus dur)
Pour les HAUTEURS, il suffit de prendre une des hauteurs, de tracer un des côtés du triangle (celui qui est perpendiculaire à cette hauteur). On prolonge ce côté pour avoir l'intersection avec les deux autres hauteurs, etc...
Pour les MÉDIATRICES, on construit comme ci-dessus le triangle correspondant aux hauteurs (triangle ABC). Ensuite, on trace la parallèle à (BC) passant par A, la parallèle à (AC) passant par B et la parralèle à (AB) passant par C. Les droites sont sécantes en A', B', C' et $A'B'C'$ est le triangle recherché (on a tracé des parallélogramme, d'où apparitions des médiatrices [on peut utiliser Thalès pour s'en convaincre]).
Pour les MÉDIANES, on place le point A sur l'une des droites, on trace les deux parallèles passant par A et parallèles aux deux autres médianes. On obtient un parallélogramme, les diagonales se coupent en leurs milieux, et on obtient les points B et C

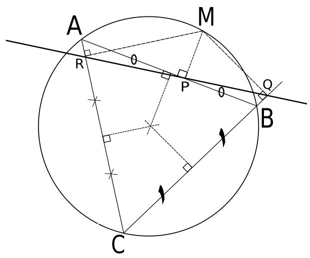
5.2 Cercle d'Euler

A faire

5.3 Droite de Simpson

Soit ABC un triangle, $M \in \mathcal{P}$, et P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur (AB),(BC) et (CA).
Montrer que P, Q, R alignés $\Longleftrightarrow M \in C$ (où C cercle circonscrit à ABC).

preuve : Si $M \in \{A, B, C\}$, on a clairement l'équivalence (parmi P, Q, R, deux de ces points sont alignés). Sinon les points P, Q, R sont deux à deux distincts, car si $P = Q$ alors $P = Q = B$ et la droite (MB) serait perpendiculaire à la fois à $(AB]$ et $(BC]$; or ces deux droites sont sécantes : absurde.
On a : $\overbrace{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})} = \overbrace{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RM})} + \overbrace{(\overrightarrow{RM},\overrightarrow{RQ})} = \overbrace{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM})} + \overbrace{(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CQ})}\,[\pi]$
d'ou P, Q, R alignés sisi $\overbrace{(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ})} = 0\,[\pi]$
sisi $\overbrace{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM})} = \overbrace{(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM})}\,[\pi]$
sisi $\overbrace{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})} = \overbrace{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CM})}\,[\pi]$
sisi $M \in C$ $\square$



6 Compléments

6.1 Autres preuves

preuve : (Médianes) Cette démonstration est plus longue, mais s'adresse à un niveau plus élémentaire (3^{eme}) ; elle utilise le théorème de Thalès :
Soit $A' = m[BC]$, $B' = m[AC]$, $C' = m[AB]$. Soient $\{G\} = (BB') \bigcap (CC')$. Montrons que $G \in (AA')$
Soit $I = s_G(A)$ donc $G = m\,[AI]$ donc par le théorème de Thalès, comme $\dfrac{AC'}{AB} = \dfrac{AG}{AI} = \dfrac{1}{2}$, on a (BI) parallèle à (GC).
De même (GB) parallèle à (IC) donc $GBIC$ parallélogramme. Or $A' = m\,[BC]$ donc $A' = m\,[GI]$. Donc $G \in (AA')$ et $\overrightarrow{GA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'A}$

6.2 Remarques

Il est possible de présenter la leçon au niveau du secondaire, à condition de donner les démonstrations ci-dessus (mais on perd de l'information pour les hauteurs).
La définition de médiane est différente dans Ladegaillerie : les médianes d'un triangle sont des SEGMENTS joignant un sommet au milieu du côté opposé.
On a mis en premier la définition de médiane, car c'est une notion purement affine (euclidiens nécessaire pour médiatrices, hauteurs, bissectrices).

6.3 Sur les bissectrices

Sans le dire, dans la preuve, on se sert de la proposition suivante :
Proposition : soit ABC triangle, soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs directeurs unitaires des demies-droites $[AB)$ et

$[AC]$). Alors $\overrightarrow{u+v}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$ bissectrice intérieure issue de A.

Il est bon de savoir aussi prouver (on s'en sert dans la preuve) :

Proposition : soit ABC triangle, Δ_A, Δ'_A les bissectrices intérieure et extérieure issues de A. Alors : $\Delta_A \cap \Delta'_A$=$\{M \in \mathcal{P}, d(M,(AB)) = d(M,(AC))\}$

6.4 Centre de gravité

G isobarycentre de A,B,C est aussi appelé "centre de gravité" du triangle ABC (pour une plaque triangulaire homogène d'épaisseur nulle). Eviter cette appelation, car elle amènera vraisemblablement le jury sur des questions de centre de gravité à calculer : triangle "vide", etc..(besoin d'intégrationsur un bord). PLus de précision d'après Le dictionnaire des mathématiques[2]

6.4.1 Centre de gravité d'un domaine cubable $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ de volume V

C'est le point G dont les coordonnées cartésiennes sont $x_G = \frac{1}{V}\iiint_D xdxdydz$, $y_G = \frac{1}{V}\iiint_D ydxdydz$, $z_G = \frac{1}{V}\iiint_D zdxdydz$.
Ex : pour le tétraèdre, c'est le point de concours des quatres droites passant par un sommet et le centre de gravité de la face opposé à ce sommet.

6.4.2 Centre de gravité d'un domaine quarrable $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ d'aire A

C'est le point G dont les coordonnées cartésiennes sont $x_G = \frac{1}{A}\iint_D xdxdy$, $y_G = \frac{1}{A}\iint_D ydxdy$.
Ex : pour le triangle, c'est aussi le centre de gravité du système de ses sommets (point de concours des médianes).
Pour un polygone autre qu'un triangle, le centre de gravité du domaine limité par le polygone est différent, en général, du centre de gravité du système de ses sommets.

6.4.3 Centre de gravité d'un système de points $A_1, A_2, ..., A_n$ d'un espace affine E

C'est le barycentre des points A_i affectés de coefficients non nuls tous égaux.

6.4.4 Centre de gravité d'un système matériel

En mécanique, on appelle ainsi le centre d'inertie du système. Le centre de gravité d'un solide S non homogène ne coïncide pas nécéssairement avec le centre de gravité mathématiques du domaine de $\mathbb{R}^3$ dont les points sont ceux de S.
Dans le cas d'un solide S **homogène**, les deux centres coïncident (ex : plaque triangulaire en fer).

6.4.5 Exemple

Soit un "cintre" en fer (triangle "vide", de bordure homogène). Le centre de gravité mécanique est le centre du cercle inscrit au triangle. Il ne coïncide donc pas avec le centre de gravité mathématiques (isobarycentre)

[2]Alain Bouvier, Michel George, François Le Lionnais, PUF