

# Exposé 28 : Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calcul de distances et d'angles, optimisation...)

**Prérequis<sup>1</sup>** :

- Barycentre
- Angles orientés de vecteurs
- Thalès-Pythagore
- Produit scalaire
- Orthogonalité de deux droites

**Cadre de la leçon** :  $(\mathcal{P}, \vec{\mathcal{P}})$  plan affine Euclidien orienté

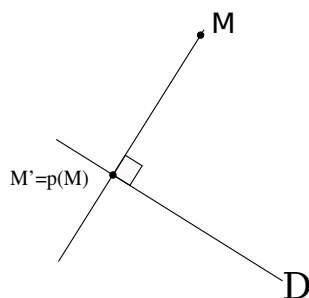
**Rappel** : soit  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ ,  $M \in \mathcal{P}$ . Il existe une unique droite passant par  $M$  et orthogonale à  $\mathcal{D}$ .

## 1 Projection orthogonale sur une droite du plan

**Définition** (PROJECTION ORTHOGONALE) : soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan  $\mathcal{P}$ . On appelle projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$  l'application  $p : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  où  $M'$  est le point d'intersection de  $\mathcal{D}$  avec la droite

$$M \mapsto M'$$

perpendiculaire à  $\mathcal{P}$  passant par  $M$ . On note  $M' = \text{proj}_{\mathcal{D}}(M)$



**Propriété (1.1) :**

(i)  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des points fixes de  $p$

(ii)  $p \circ p = \text{id}$

(iii) Soit  $M \in \mathcal{P}$ , alors :  
-si  $M \notin \mathcal{D}$  alors  $p^{-1}(M) = \emptyset$   
-si  $M \in \mathcal{D}$  alors  $p^{-1}(M)$  est la droite perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  passant par  $M$

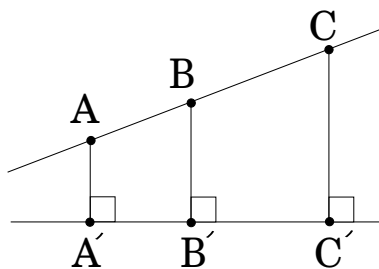
**Propriété (1.2) :**

Soit  $k \in \mathbb{R}$ ,  $A, B, C \in \mathcal{P}$  tels que  $\vec{AB} = k \cdot \vec{AC}$ . Alors  $\overrightarrow{p(A)p(B)} = k \cdot \overrightarrow{p(A)p(C)}$

---

<sup>1</sup>L'exposé a été présenté à Bordeaux(4) le 10/01/2005 par Johann, a été corrigé par M.C, a été recopié par Gwendal Hadebourg. Réalisé avec L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, Inkscape pour les dessins. Mise à jour le 13/05/2007.

**preuve :** théorème de Thalès



**Corollaire (1.1) :** L'application  $p$  conserve les barycentres : soit  $G = \text{bar}\{(M_1, \alpha_1), \dots, (M_n, \alpha_n)\}$ ,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$ , alors  $p(G) = \text{bar}\{(p(M_1), \alpha_1), \dots, (p(M_n), \alpha_n)\}$

preuve (Corollaire 1.1) : par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$

Soit  $G = \text{bar}\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2)\}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ . On a donc  $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} = -\alpha_2 \overrightarrow{GA_2}$ , d'où

$(\alpha_1 + \alpha_2) \overrightarrow{MG} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2}$ . En posant  $M = A_1$ , on obtient :

$\overrightarrow{A_1 G} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \overrightarrow{A_1 A_2}$ . D'où :

$\overrightarrow{p(A_1)p(G)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \overrightarrow{p(A_1)p(A_2)}$ , ie  $p(G) = \text{bar}\{(p(A_1), \alpha_1), (p(A_2), \alpha_2)\}$ .

Le cas général se ramène au cas où  $n = 2$  grâce à l'associativité du barycentre :

$\text{bar}\{(M_1, \alpha_1), \dots, (M_{n-1}, \alpha_{n-1}), (M_n, \alpha_n)\} = \text{bar}\{(H_1, \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}), (M_n, \alpha_n)\}$ , avec  $\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} \neq 0$  (en fait, rien ne nous dit que cette somme est différente de 0, mais on sait qu'il existe une sous-famille à  $n - 1$  éléments tels la somme de leurs coefs. soit différente de 0, car sinon, cela implique  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ , d'où la contradiction). □

**conséquences :** l'application  $p$  est une application affine, l'image d'une droite par  $p$  est une droite.

## 2 Projection vectorielle associée à $p$

**Définition-Théorème (2.1) :**

Soit  $p$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{D}$  ; l'application  $\Pi : \begin{matrix} \vec{\mathcal{P}} & \rightarrow & \vec{\mathcal{P}} \\ \overrightarrow{AB} & \mapsto & \overrightarrow{p(A)p(B)} \end{matrix}$  est appelée projection

vectorielle associée à  $p$ .

De plus,  $\Pi$  est bien définie, linéaire, et  $\Pi \circ \Pi = \Pi$

preuve :

(1) Montrons que  $\Pi$  est bien définie sur l'image  $\overrightarrow{AB}$ , car ne dépendant que du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , et non du choix des points  $A$  et  $B$ . Il faut donc montrer que  $[\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{p(C)p(D)}]$ .

Soit  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow G := \text{bar}\{(A; 1), (D; 1)\} = \text{bar}\{(C; 1), (B; 1)\}$ , donc par le corollaire (1.1)

$\overrightarrow{p(G)p(A)} + \overrightarrow{p(G)p(D)} = \overrightarrow{p(G)p(C)} + \overrightarrow{p(G)p(B)}$ , et par Chasles  $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{p(C)p(D)}$ .

(2)  $\forall A, B, C \in P$ , on a  $\Pi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \Pi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{p(A)p(C)} = \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{p(B)p(C)} = \Pi(\overrightarrow{AB}) + \Pi(\overrightarrow{BC})$  (si on se donne deux vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{EF}$ , on peut toujours se ramener à ce cas, en posant  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ ).

De plus, si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\Pi(k \cdot \vec{u}) = \Pi(k \cdot \overrightarrow{AB}) = \Pi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{p(A)p(C)} = k \cdot \overrightarrow{p(A)p(B)}$ , donc  $\Pi$  est linéaire.

Et  $\Pi(\Pi(\overrightarrow{AB})) = \Pi(\overrightarrow{p(A)p(B)}) = \overrightarrow{p(p(A))p(p(B))} = \overrightarrow{AB}$  car  $p \circ p = p$ , donc  $\Pi \circ \Pi = \Pi$  □

**Proposition (2.1) :**

Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan. Tout vecteur  $\vec{u} \in \vec{P}$  se décompose de manière unique  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ , où  $\vec{u}_1 \in \vec{\mathcal{D}}$  et  $\vec{u}_2 \in \vec{\mathcal{D}}^\perp$  (ie  $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{D}} \oplus \vec{\mathcal{D}}^\perp$ ).

preuve : On a besoin du lemme suivant :  $\text{Ker}(\Pi) = \vec{\mathcal{D}}^\perp$  (preuve du lemme à faire).

Soit  $\Pi$  la projection vectorielle associée à  $p$ ,  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$

existence : soit  $\vec{u}_1 = \Pi(\vec{u})$ ,  $\vec{u}_2 = \vec{u} - \Pi(\vec{u})$ . Par définition de  $\Pi$ , on a bien  $\vec{u}_1 \in \vec{\mathcal{D}}$ .

$\Pi(\vec{u}) = \Pi(\Pi(\vec{u}) + \vec{u} - \Pi(\vec{u})) = \Pi \circ \Pi(\vec{u}) + \Pi(\vec{u} - \Pi(\vec{u})) = \Pi(\vec{u}) + \Pi(\vec{u}_2) \Rightarrow \Pi(\vec{u}_2) = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 \in \vec{\mathcal{D}}^\perp$ .

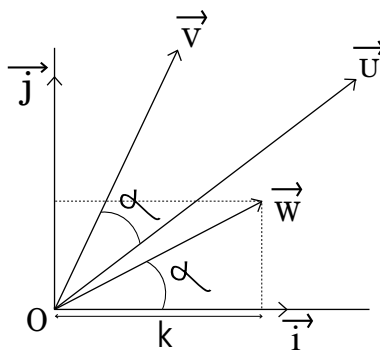
unicité : par l'absurde □

### 3 Applications

#### 3.1 Cosinus d'un angle de deux vecteurs

**Proposition (3.1) :**

1. soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct. Soit  $\vec{u}, \vec{v}$  non nuls  $\in \vec{\mathcal{P}}$ . Il existe un unique vecteur **unitaire**  $\vec{w}$  tel que  $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{w})[2\pi]$
2. Soit  $p$  est la projection orthogonale sur la droite  $(Ox)$  et  $\Pi$  la projection vectorielle associée à  $p$ . Alors il existe un unique  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\Pi(\vec{w}) = k \cdot \vec{i}$



**Définition** : le nombre  $k$  défini ci-dessus ne dépend que de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$ , et est appelé *cosinus* de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

**Proposition (3.2)** : soit  $D$  une demi-droite d'origine  $O$ ,  $\alpha = ([Ox), \mathcal{D})$ . Alors  $\forall M \in \mathcal{D}$ , on a :  $OM = \cos(\alpha) \cdot OM$  où  $H = \text{proj}_{\perp, (Ox)}(M)$

#### 3.2 Distance

**Proposition (3.3)** : soit  $M \in \mathcal{P}$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ ,  $H = \text{proj}_{\perp, \mathcal{D}}(M)$ . Alors  $\forall P \in \mathcal{D}$ ,  $P \neq H$ , on a :  $MH < MP$

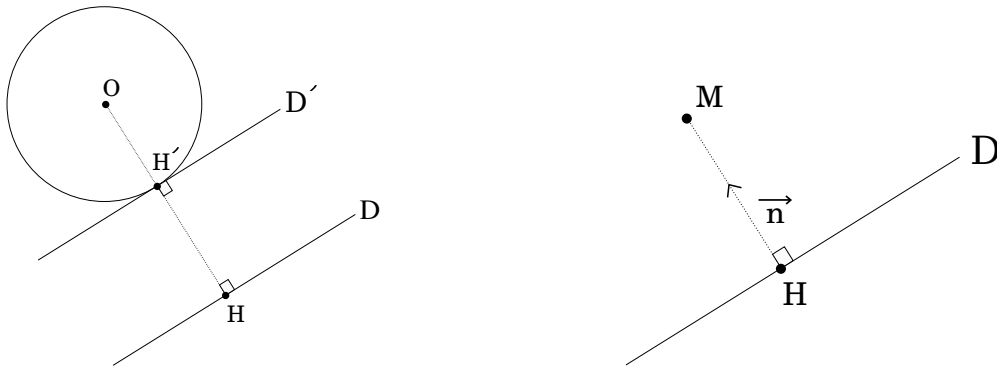
**Définition** : on définit la distance du point  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$  comme étant :  $d(M, \mathcal{D}) = \inf(MP)_{P \in \mathcal{D}}$

**Proposition (3.4)** : on a :  $d(M, \mathcal{D}) = \inf(MP)_{P \in \mathcal{D}} = MH = \min(MP)_{P \in \mathcal{D}}$  où  $H = \text{proj}_{\perp, \mathcal{P}}(M)$

preuve : par la proposition (3.3)

**Exercices 1 et 2 :**

1. déterminer la distance d'un cercle à un droite
2. calcul de  $d(M, \mathcal{D})$ , où  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , et  $M(x_0, y_0)$



preuve : (1) soit  $\mathcal{D}$  une droite,  $C$  un cercle de  $\mathcal{P}$ . On définit  $d(\mathcal{D}, C) = \inf\{d(M, M'), M \in \mathcal{D}, M' \in C\}$ .  
 -Si  $C(O, R) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ , alors  $d(\mathcal{D}, C) = 0$  (car  $d(M, M) = 0$  où  $M \in C(O, R) \cap \mathcal{D}$ ).  
 -Si  $C(O, R) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ , alors soit  $H = \text{proj}_{\perp, \mathcal{D}}(O)$  et  $H' = (OH) \cap C$ . Soit  $\mathcal{D}' \parallel \mathcal{D}$  passant par  $H'$ .  $\mathcal{D}'$  est tangente à  $C$  au point  $H'$  (évident). De plus  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$  donc  $d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = d(H', \mathcal{D}) = HH'$  (pour le montrer : pythagore). Donc  $d(\mathcal{D}', C) = 0$  et  $d(\mathcal{D}, C) = d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = HH'$ .  
 (2) on sait que  $\vec{n}(a, b)$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}$ . Soit  $M \in \mathcal{P}$ ,  $H = \text{proj}_{\perp, \mathcal{D}}(M)$ . On a

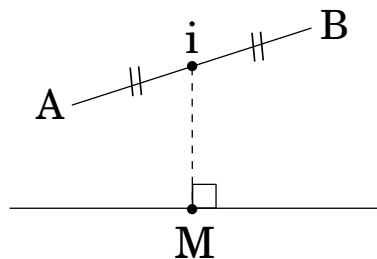
$$d(M, \mathcal{D}) = MH = \frac{|\overrightarrow{MH} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|a(x_0 - x_H) + b(y_0 - y_H)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \text{ or } H \in \mathcal{D}, \text{ donc } ax_H + by_H = -c, \text{ d'où :}$$

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□

### 3.3 Optimisation

**exercice 3** : soit  $A, B \in \mathcal{P}$  tel que  $A \neq B$ ,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ . Trouver  $M \in \mathcal{D}$  tel que  $MA^2 + MB^2$  soit minimale



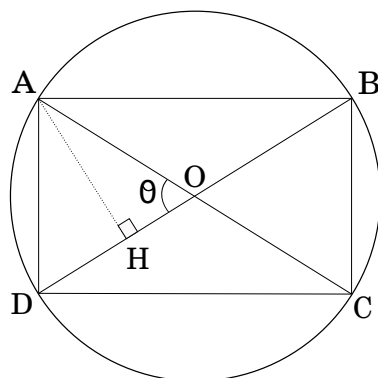
preuve : soit  $I = m[AB]$  ie  $I = \text{bar}\{(A; 1), (B; 1)\}$ .

$MA^2 + MB^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\vec{MI} \cdot (\vec{IA} + \vec{IB})$  avec  $IA^2 + IB^2 = \text{cste}$  et  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ . Donc minimiser  $MA^2 + MB^2$  revient à minimiser  $MI^2$  ie  $M = \text{proj}_{\perp, \mathcal{D}}(I)$ .

remarque : on a aussi  $M = m[A'B']$  où  $A' = p_{\perp, \mathcal{D}}(A)$  et  $B' = p_{\perp, \mathcal{D}}(B)$  par conservation du barycentre.

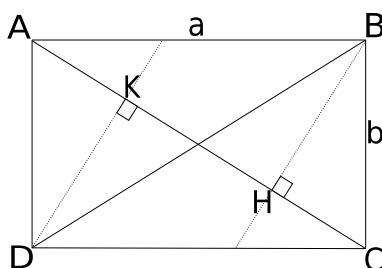
□

**exercice 4** : soit  $ABCD$  un rectangle inscrit dans un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Montrer que l'aire  $ABCD$  est maximale lorsque  $ABCD$  est un carré.



preuve : soit  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BD)$ .  $\mathcal{A}_{ABCD} = AH \cdot 2R$  et  $AH = R \cdot \sin \theta$ , d'où  $\mathcal{A}_{ABCD} = 2R^2 \sin \theta$ . L'aire est maximale si  $\sin \theta$  est maximal, ie si  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ie  $ABCD$  est un carré.  $\square$

**exercice 5** : soit  $ABCD$  un rectangle. En évaluant de deux façons  $\vec{CA} \cdot \vec{BD}$ , montrer que  $HK = \frac{|a^2 - b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



preuve :  $\vec{HK}$  étant le projeté orthogonal de  $\vec{BD}$  sur  $(AC)$ , on a  $\vec{CA} \cdot \vec{BD} = \vec{CA} \cdot \vec{HK}$ , donc  $\vec{CA} \cdot \vec{BD} = \vec{CA} \cdot \vec{HK} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot HK$ . D'autre part  $\vec{CA} \cdot \vec{BD} = \vec{CA} \cdot (\vec{BA} + \vec{AD}) = \vec{CA} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{AD}$ . En considérant les projetés orthogonaux de  $\vec{CA}$  et  $\vec{BA}$  sur  $(AD)$ , il vient  $\vec{CA} \cdot \vec{BA} = BA^2 = a^2$  et  $\vec{CA} \cdot \vec{AD} = \vec{DA} \cdot \vec{AD} = -b^2$ , d'où  $\vec{CA} \cdot \vec{BD} = a^2 - b^2$ . On a donc  $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot HK = a^2 - b^2$ , d'où le résultat.  $\square$

### 3.4 Divers-Questions fréquentes

**Généralisation de l'exercice 3** : soit  $\mathcal{D}$  une droite,  $A, B, C \in \mathcal{P}$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Comment choisir  $M$  sur  $\mathcal{D}$  tel que  $\alpha \cdot MA^2 + \beta \cdot MB^2 + \gamma \cdot MC^2$  soit minimale ?

On introduit  $G = \text{bar}(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$ . On a  $\alpha \cdot GH^2 + \beta \cdot GB^2 + \gamma \cdot GC^2$

à finir On peut écrire ceci avec autant de points que l'on veut...

#### Pièges-Questions fréquentes :

(1) Le plus important de la leçon : montrer que  $\Pi$  est bien définie, d'où l'intérêt de montrer le Corollaire 1 assez tôt dans la leçon (sinon, la preuve est beaucoup plus dure, en appliquant Thalès plusieurs fois).

(2) Dans cette leçon, il est important de savoir prouver Thalès sans utiliser les projections (car on se sert de Thalès dans la leçon pour montrer la propriété (1.2)). Il faut donc éviter le cercle vicieux projection-Thalès.

De plus, dans la démonstration de (1.2), il faut faire attention aux cas particuliers : lorsque  $A, B, C$  sont alignés (coefs. nuls possibles).

(3) l'application  $\Pi$  est-elle diagonalisable ? Oui, car  $\min_{\Pi}(x)$  divise  $x^2 - x = x(x - 1)$  (où  $\min_{\Pi}(x)$  est le polynôme minimal de  $\Pi$ ), car  $\Pi^2 = \Pi$ . Le pol. minimale de  $\Pi$  est donc scindé simple, donc  $\Pi$  est diagonalisable !

De plus,  $\vec{\mathcal{E}}_1 = \vec{\mathcal{D}}$ ,  $\vec{\mathcal{E}}_2 = \vec{\mathcal{D}}^\perp$ , d'où  $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{E}}_1 \oplus \vec{\mathcal{E}}_2 = \vec{\mathcal{D}} \oplus \vec{\mathcal{D}}^\perp$ . C'est une autre démonstration possible de la proposition (2.1)

**preuve de  $\text{Ker}(\Pi) = \overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp$  :**

-Il est clair que  $\text{Im}\Pi = \overrightarrow{\mathcal{D}}$  par définition de  $p$  et  $\Pi$

-Soit  $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp$ , et soient  $A, B \in \mathcal{P}$  tq.  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ; on a donc  $(AB) \perp \mathcal{D}$  ie  $p(A) = p(B)$

$\Pi(\vec{u}) = \Pi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{p(A)p(B)}$ , donc  $\vec{u} \in \text{Ker}\Pi$  ie  $\overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp \subset \text{Ker}\Pi$

Soit  $\vec{u} \in \text{Ker}\Pi$  (ie  $\Pi(\vec{u}) = \vec{0}$ ) et  $A, B \in \mathcal{P}$  tq.  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$   $\vec{0} \Leftrightarrow \Pi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{p(A)p(B)} = \vec{0}$  ie  $p(A) = p(B)$  ie  $(AB) \perp \mathcal{D}$ , ie  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}^\perp$