# Exposé 26 : Equation cartésienne d'une droite du plan euclidien. Application à l'étude d'inéquations de la forme $a\cos t + b\sin t \geqslant c$

**Prérequis**[1] :
-Notion de vecteurs colinéaires et othogonaux.
-Définition d'une droite.
-Notion de vecteurs directeurs et normaux.
-Notion de droites parallèles, perpendiculaires.

Cadre : on se place dans $(\mathcal{P}, \overrightarrow{\mathcal{P}})$ plan affine euclidien muni d'un repère orthonormée $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

## 1 Equation cartésienne d'une droite du plan

### 1.1 Cas général

**Théorème** : (i) Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b) \neq (0, 0)$ tq.

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow ax + by + c = 0$$

(ii) Réciproquement, soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq. $(a, b) \neq (0, 0)$. L'ensemble
$\mathcal{D} = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, ax + by + c = 0\}$ est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-b, a)$
(iii) Réciproquement, soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq. $(a, b) \neq (0, 0)$. L'ensemble
$\mathcal{D} = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, ax + by + c = 0\}$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$

**remarque** : pour désigner une droite $\mathcal{D}$, on utilisera les notations $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{n^{\perp}})$ (ou $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{n})$)

preuve : (i) soit $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{n})$ une droite du plan, avec $A(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{n}(a, b)$ vecteur normal de $\mathcal{D}$.
$M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ où $-ax_0 - by_0 = c$
(ii) et (iii) Soit $\mathcal{D} := \{M(x, y) \in \mathcal{P}, ax + by + c = 0\}$. $\mathcal{D}$ est clairement non vide. Soit $A(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ et $M(x, y) \in \mathcal{D}$ ie $ax_0 + by_0 + c = 0$ et $ax + by + c = 0$ d'où $ax + by + c = ax_0 + by_0 + c \Leftrightarrow$
$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM} = 0$ où $\overrightarrow{n}(a, b)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_0, y - y_0)$ donc bien une droite $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{n})$
$\Leftrightarrow -a(x - x_0) - b(y - b_0) = 0 \Leftrightarrow det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & x - x_0 \\ a & y - y_0 \end{vmatrix} = 0$ où $\overrightarrow{u}(-b, a)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_0, y - y_0)$
donc bien une droite $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ □

**Définition** : L'écriture $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est appelé l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$

[1]Exposé tapé et présenté le 11/01/20006 par Gwendal Haudebourg. Elle s'inspire de la leçon de Johann (2004-2005). Réalisé avec LaTeX, et Inkscape pour les dessins. Mise à jour le 25/03/2006.

### 1.2 Equation réduite

**Proposition** : si $\mathcal{D}$ non parallèle à $(O, \overrightarrow{j})$, elle possède une unique équation de la forme $y = mx + p$ (1)

preuve : (existence) soit $\mathcal{D}$ une telle droite. $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, et pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-b, a)$ non colinéaire à $\overrightarrow{j}(0, 1)$ ie $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{j}) = \begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$
donc $b \neq 0$ et $y = \dfrac{-a}{b}x - c$ (unicité : évident) □

**Définition** : (1) est appelée équation réduite de $\mathcal{D}$. $m$ est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$, et $p$ l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$.

**remarque** : si $\mathcal{D} \parallel (O, \overrightarrow{j})$, alors elle admet une équation de la forme $x = C$, $C \in \mathbb{R}$. En effet, si $\overrightarrow{u}(a, b) = (0, m)$ dirige $\mathcal{D}$, alors $M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $b = 0$ donc $x = \dfrac{-c}{a} = C$

### 1.3 Droites parallèles et orthogonales

**Théorème** : soit $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, et $\mathcal{D}'$ la droite du plan d'équation $a'x + b'y + c' = 0$, $(a', b') \neq (0, 0)$. Alors :
(i) $\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{D}' \Longleftrightarrow ab' - a'b = 0$
(ii) $\mathcal{D}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}' \Longleftrightarrow aa' + bb' = 0$

preuve : (i) $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{u}(-b, a)$ et $\overrightarrow{v}(-b', a')$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$
(ii) $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{n}(a, b)$ et $\overrightarrow{n'}(a', b')$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$ □

**Proposition** : soit $\mathcal{D}$ une droite du plan d'équation réduite $y = mx+p$, et $\mathcal{D}'$ une droite du plan d'équation réduite $y = m'x + p'$. Alors :
(i) $\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{D}' \Longleftrightarrow m = m'$
(ii) $\mathcal{D}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}' \Longleftrightarrow mm' = -1$

preuve : se ramener à une équation cartésienne et utiliser le théorème précédent : $\mathcal{D} : y - mx - p = 0$, $\mathcal{D}' : y - mx' - p' = 0$
$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow 1.(-m') + m.1 = 0 \Leftrightarrow m = m'$
$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow 1 + m'm = 0 \Leftrightarrow mm' = -1$ □

## 2 Compléments sur la droite

### 2.1 Distance d'un point à une droite

**Théorème** : la distance du point $M(x_M, y_M)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ (où $(a, b) \neq (0, 0)$) est $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

preuve : soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\overrightarrow{n}(a, b)$ vecteur normal à $\mathcal{D}$. soit $H = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$ (donc $H \in \mathcal{D}$),

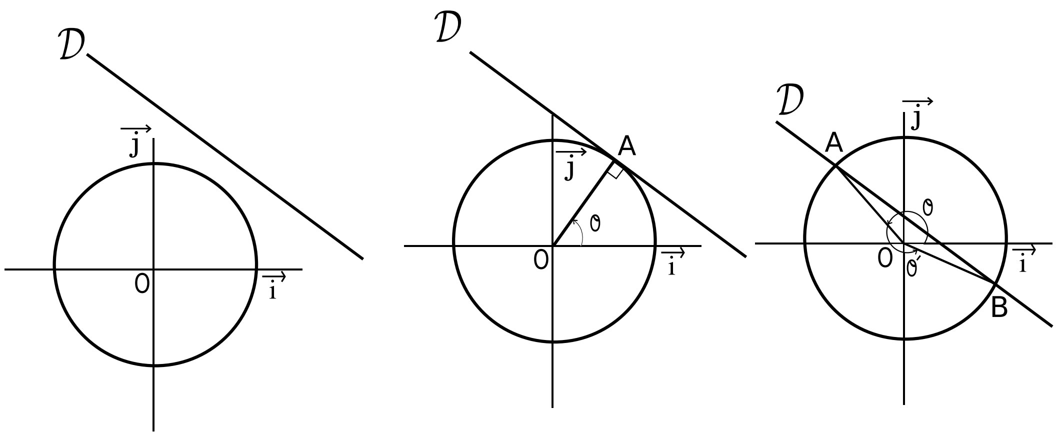
$$d(M, \mathcal{D}) = MH = \frac{|\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|a(x_H - x_M) + b(y_H - y_M)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{| - ax_M - by_M - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ □

### 2.2 Régionnement du plan par une droite

**Théorème** : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. La droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ partage le plan $\mathcal{P}$ en deux demi-plans ouverts :
$\mathcal{P}^+ = \{M(x, y), ax + by + c > 0\}$, $\mathcal{P}^- = \{M(x, y), ax + by + c < 0\}$ et on a : $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \bigcup \mathcal{P}^- \bigcup \mathcal{D}$ (réunion disjointe)

# 3 Application à l'étude de l'inéquation $a \cos t + b \sin t > c$

Soit $(E)$ : $a \cos t + b \sin t > c$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
$t \in \mathbb{R}$ solution de $(E) \Leftrightarrow (x, y)$ solution de $\begin{cases} ax + by > c & \text{où} \quad x = \cos t, y = \sin t \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
$t \in \mathbb{R}$ solution de $(E) \Leftrightarrow M(x, y) \in C \cap \mathcal{P}^+$ avec $x = \cos t$ et $y = \sin t$ (où $C = C(O, 1)$, $\mathcal{P}^+ = \{M(x, y), ax + by - c > 0\}$).
Pour résoudre $(E)$, on est ramené à un problème géométrique. On doit rechercher l'intersection de $C$ avec $\mathcal{P}^+$
Soit $\mathcal{D}$ : $ax + by - c = 0$, $d(O, \mathcal{D}) = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
On a donc trois cas qui apparaissent :

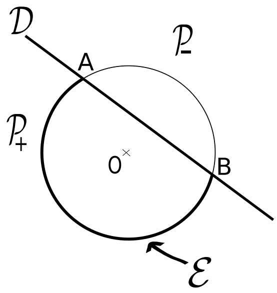


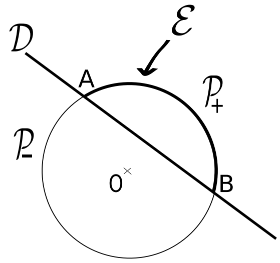

$\mathcal{S}$=ensemble des solutions de $(E)$, $\mathcal{E} = C \cap \mathcal{P}^+$

<u>Cas 1</u> : $d(O, \mathcal{D}) > 1 \Leftrightarrow |c| > \sqrt{a^2 + b^2}$ ie $c \neq 0$, $C \cap \mathcal{D} = \emptyset$
$c < 0 \Rightarrow O \in \mathcal{P}^+$ (car $0 * a + 0 * b - c > 0$ ie $O \in \mathcal{P}^+$) donc $\mathcal{E} = C$, donc $S = \mathbb{R}$
$c > 0 \Rightarrow O \notin \mathcal{P}^+$ donc $\mathcal{E} = \emptyset$, donc $S = \emptyset$

<u>Cas 2</u> : $d(O, \mathcal{D}) = 1 \Leftrightarrow |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $C \cap \mathcal{D} = \{A\}$
On a $c \neq 0$ car $(a, b) \neq (0, 0)$
$c < 0 \Rightarrow O \in \mathcal{P}^+$ (car $0 * a + 0 * b - c > 0$ ie $0 \in \mathcal{P}^+$) donc $\mathcal{E} = C - \{A\}$, donc $S = \mathbb{R} - \{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$c > 0 \Rightarrow O \notin \mathcal{P}^+$ donc $\mathcal{E} = \emptyset$, donc $S = \emptyset$

<u>Cas 3</u> : $d(O, \mathcal{D}) < 1 \Leftrightarrow |c| < \sqrt{a^2 + b^2}$, $c \neq 0$, $C \cap \mathcal{D} = \{A, B\}$
Même raisonnement, on regarde si $O \in \mathcal{P}^+$. On en déduit que $\mathcal{E}$ est l'un des arcs $\widehat{AB}$






On en déduit l'ensemble $S$ correspondant.

**Exercices** : résoudre les inéquations suivantes

1. $2\cos t + \sin t - 3 > 0$
2. $-\sqrt{3}\cos t - \sin t + 2 > 0$
3. $2\cos t + 2\sin t - \sqrt{3} + 1 > 0$

Résolution :

1) $\mathcal{P}^+ = \{M(x, y), 2x + y - 3 > 0\}$ où $x = \cos t, y = \sin t$
$d(O, \mathcal{D}) = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} > 1$ (on est donc dans le cas 1)
$O \notin \mathcal{P}^+$ $(c = 3)$ donc $S = \emptyset$

2) $\mathcal{P}^+ = \left\{M(x, y), -\sqrt{3}x - y + 2 > 0\right\}$, $d(O, \mathcal{D}) = \dfrac{2}{\sqrt{4}} = 1$ (on est donc dans le cas 2)
$O \in \mathcal{P}^+$ $(c = -2)$ donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}^+ = \mathcal{C} - \{A\}$, $A \in \mathcal{D}$ et $A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x_A + y_A = 2 \\ x_A^2 + y_A^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 2 - \sqrt{3}x_A \\ x_A^2 + y_A^2 = 1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 2 - \sqrt{3}x_A \\ x_A^2 + (2 - \sqrt{3}x_A^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = 2 - \sqrt{3}x_A \\ 4x_A^2 - 4\sqrt{3}x_A + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = \frac{1}{2} \\ x_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{A}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
Donc $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{\pi}{6}$ et $S = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) $\mathcal{P}^+ = \left\{M(x, y), 2x + 2y - \sqrt{3} + 1 > 0\right\}$ où $x = \cos t, y = \sin t$
$d(O, \mathcal{D}) = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} < 1$ (on est dans le cas 3)
$b > 0, \mathcal{P}^+ = \left\{M(x, y), y > \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} - x\right\}$. On cherche les coordonnées de $A, B$ avec $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ y = \dfrac{-1 + \sqrt{3}}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{A}\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$
$O \notin \mathcal{P}'$ (car $2.0 + 2.0 - \sqrt{3} + 1 < 0$), $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OA}) = \dfrac{2\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{-\pi}{6}$ donc $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}' = \widehat{BA}$ ie

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{-\pi}{6} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$$

# 4 Compléments

## 4.1 Rappels

-on définit une droite par deux points, ou par un point et un vecteur normal, ou par un point et un vecteur directeur :

1. $\left\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM} = 0\right\}$ : droite de vecteur normal $\overrightarrow{n} \neq 0$ passant par $A$
2. $\left\{M \in \mathcal{P}, det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = 0\right\}$ : droite de vecteur unitaire $\overrightarrow{u} \neq 0$ passant par $A$, ou encore : $\left\{M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u}\right\}$
3. $\left\{M \in \mathcal{P}, det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0\right\}$ : droite passant par $A$ et $B$

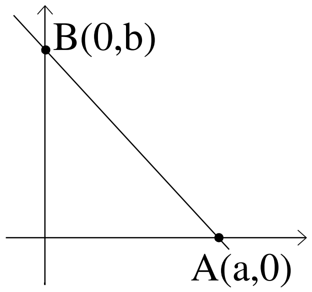
-on dit que deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si(si) leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
-si $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{n}$ colinéaires, $||\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{n}||$=$\overrightarrow{n}$=$MH.\overrightarrow{n}$
On peut rajouter ce qui suit dans le théorème sur le régionnement du plan par une droite :
-$\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ sont convexes
-si $M \in \mathcal{P}^+$ et $N \in \mathcal{P}^-$, alors $[MN]$ coupe la frontière $\mathcal{D}$ en un point.

## 4.2 A revoir

Revoir la distance d'un point $A$ à une droite $\mathcal{D}$. Si je me souviens bien $d(A, \mathcal{D}) := inf\{AM, M \in \mathcal{D}\}$. Il faut d'abord montrer que cet $inf$ est atteint, et ce au point $H = proj_{\perp,\mathcal{D}}(A)$ (par l'inégalité triangulaire, ou par le théorème de pythagore)

## 4.3 Questions diverses

Existe t-il d'autres définitions-représentations d'une droite ?
-Représentation paramétrique : $\mathcal{D} = A + \lambda\overrightarrow{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u}(-b, a)$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$
D'où $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} x_A - \lambda b \\ y_A + \lambda a \end{pmatrix}$
Autre forme : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$




## 4.4 distance

Existe t-il une autre preuve du théorème 3 ?
Soit $N(x, y) \in \mathcal{D}$, $M(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$. Alors $d(M, \mathcal{D})^2$=$inf\left\{MN^2, N \in \mathcal{D}\right\}$=$inf\left\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, (x, y) \in \mathcal{D}\right\}$ $= inf\left\{(x - x_0)^2 + (\frac{-c}{b} - \frac{-c}{a}x - y_0)^2, x \in \mathbb{R}\right\}$ puis on étudie la fonction $f(x) = x - x_0)^2 + (\frac{-c}{b} - \frac{-c}{a}x - y_0)^2$ (sens de variation) et on en déduit l'$inf$. On retrouve ainsi le même résultat : $inf = MH$
où $H = proj_{\perp,\mathcal{D}}(M)$

**Théorème** : soit $\mathcal{D}$ la tangente à une courbe $C$ en $M_0$, $M \in C$ $d(M,\mathcal{D}) = o(|MM_0|)$ lorsque $M \to M_0$
ie $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{d(M,\mathcal{D})}{|MM_0|} = 0$

## 4.5 tangente

Autre définition de la tangente $\Delta$ en un point $M(x_0, y_0)$ ?
(i) : $\Delta : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
(ii) En regardant les différentes sécantes à la courbe au point $M(x_0, y_0)$, il apparaît que $\Delta$ est la droite passant par $M(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ (ce qui revient à (i))

preuve : groupe 2

## 4.6 Exercice 1

charge maximum=42 tonnes, au maximum 30 contenaires
A=0.6 tonnes par contenaire, B=3 tonnes par contenaire. On veut transporter au moins 15 contenaires de type A, 8 de type B. D'où le système :

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 0.6x + 3y \leqslant 42 \\ x + y \leqslant 30 \\ x \geqslant 15 \\ y \geqslant 8 \end{cases}$$

## 4.7 Exercice 2

Résoudre $\cos t + \sqrt{3} \sin t > 1$

On peut soit résoudre par la manière expliquée dans cet exposé, soit :
$\cos t + \sqrt{3} \sin t > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \cos t + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin t > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(t - \dfrac{\pi}{3}) > \dfrac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq. $-\dfrac{\pi}{3} + k.2\pi < t - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{\pi}{3} + k.2\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq. $k.2\pi < t < \dfrac{2\pi}{3} + k.2\pi$

Ou encore : $f(t) = \cos t + \sqrt{3} \sin t - 1$ est $2\pi$ périodique, $f'(t) = -\sin t + \sqrt{3} \cos t$
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \arctan(\sqrt{3})$, puis tableau de varation...

## 4.8 Preuve : régionnement du plan par une droite

**Théorème** : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. La droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ partage le plan $\mathcal{P}$ en deux demi-plans ouverts :
$\mathcal{P}^+ = \{M(x, y), ax + by + c > 0\}$, $\mathcal{P}^- = \{M(x, y), ax + by + c < 0\}$. On a :
(1) $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \bigcup \mathcal{P}^- \bigcup \mathcal{D}$ (réunion disjointe)
(2) $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ sont convexes
(3) Si $M \in \mathcal{P}^+$ et $N \in \mathcal{P}^-$, le segment $[MN]$ coupe la frontière $\mathcal{D}$ en un point.

preuve : (1) triviale : la réunion est clairement disjointe, et un point $M(x, y) \in \mathcal{P}$ est soit tel que $ax + by + c = 0$, soit $> 0$, soit $< 0$
(2) Montrons que $\mathcal{P}^+$ convexe. Soient $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ appartiennent à $\mathcal{P}^+$ ; montrons que tout point $T(x_T, y_T) \in [MN]$ est dans $\mathcal{P}^+$ :
Il existe $\alpha \in [0, 1]$ tq. $(x_T, y_T) = t(x_M, y_M) + (1 - t)(x_N, y_N)$ (*), d'où $x_T = tx_M + (1 - t)x_N$ et $y_T = ty_M + (1 - t)y_N$, d'où
$ax_T + by_T + c = a(tx_M + (1 - t)x_N) + b(ty_M + (1 - t)y_N) + c = t(ax_M + by_M + c) + (1 - t)(ax_N + by_N + c) > 0$

(3) si $ax_M + by_M + c > 0$ et $ax_N + by_N + c < 0$, tout point $T$ du segment $[MN]$ possède des coordonnées $(x_T, y_T)$ données par (*).
Il s'agit donc de trouver $t \in [0, 1]$ tel que $a(tx_M + (1 - t)x_N) + b(ty_M + (1 - t)y_N) + c = 0$. Cette équation du premier degré en $t$ admet une unique solution puisque le coefficient $t$ n'est pas nul (car cela impliquerait que $ax_M + by_M + c{=}ax_N + by_N + c$, ce qui est absurde). $\square$