Exposé 24 : Théorème de Thalès. Applications à la géométrie du plan et de l'espace.

Prérequis[1] : -Mesure algébrique
–Calcul vectoriel
-Espaces affines et vectoriels
-Géométrie élémentaire

Cadre de la leçon : $(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}})$ espace affine.

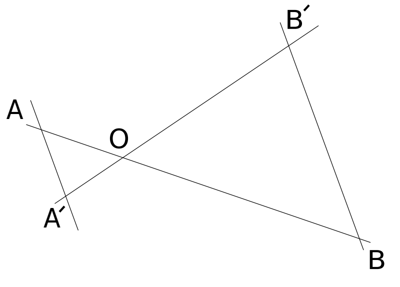
Rappel mesure algébrique : soit $\mathcal{D}$ une droite de E, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. $\forall A, B \in \mathcal{D}$, il existe un unique scalaire λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{u}$. Ce scalaire est appelé mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ relative au vecteur unité $\overrightarrow{u}$, et est noté $\overline{AB}$ (ie $\overline{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{u}}$).

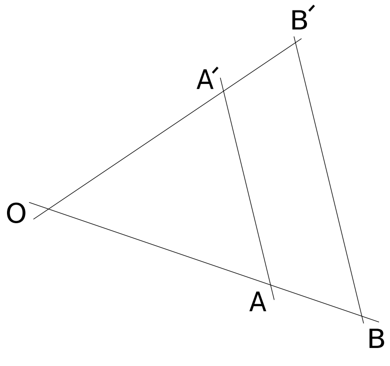
1 Théorème de Thalès

Théorème de Thalès dans le triangle : soit deux triangles non applatis OAA' et OBB' tels que $A \in (OB)$ et $A' \in (OB')$, et tel que les droites (AA') et (BB') soient parallèles. Alors on a :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}=\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$

preuve : $(AA') \mathbin{/\!/} (BB')$ donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tq. $\overrightarrow{BB} = k.\overrightarrow{AA}$. Par hypothèse $A \in (OB)$ et $A' \in (OB')$ donc $\exists(\alpha, \alpha')$ tq. $\overrightarrow{OB} = \alpha.\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = \alpha.\overrightarrow{OA'}$ or $\overrightarrow{BB'} = k.\overrightarrow{AA'}$, donc $\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} = k.(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA})$, donc $(k - \alpha)\overrightarrow{OA'}+(\alpha - k)\overrightarrow{OA} = 0$, or $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont linéairement indépendants (car O, A, A' ne sont pas alignés), donc $\alpha' = k = \alpha$. Donc $\overrightarrow{OB} = k.\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k.\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{BB} = k.\overrightarrow{AA'}$.
On obtient l'égalité souhaité en choisissant les vecteurs directeurs des doites pour la mesure algébrique. □



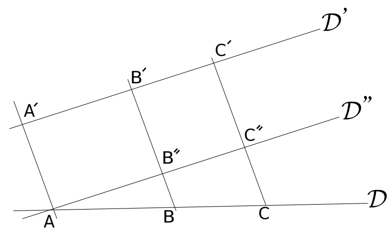


[1] Exposé tapé et présenté par Gwendal Haudebourg à Bordeaux IV le 15/11/2006. Réalisé avec LaTeX, Inkscape pour les dessins. Leçon largement inspirée de celle de Johann.

Théorème de Thalès dans le plan : soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes, A, B, C (respectivement A', B', C') trois points distincts appartenant à $\mathcal{D}$ (respectivement à $\mathcal{D}'$), avec $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$, et tel que $(AA'), (BB')$ et (CC') soient parallèles. Alors on a :

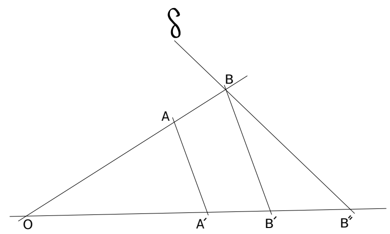
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

preuve : on trace $\mathcal{D}''$ la parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par A. On a des parallélogrammes $A'B'B''A$ et $A'C'C''A$, donc on a des égalitées vectorielles, et avec les triangles $AB''B$ et $AC''C$ non applatis, on se ramène au théorème de Thalès dans le triangle. □



Théorème (réciproque du théorème de Thalès) : soit (O, A, B, A', B') cinq points distincts d'un plan tels que O, A, B soient alignés, et O, A', B soient alignés. Si de plus on a $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$, alors les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

preuve : soit B'' le point d'intersection de (OA') et de la droite δ parallèle à (AA') passant par B. D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB''}}$. Donc $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB''}}$, donc $\overline{OB'} = \overline{OB''}$, donc $B' = B''$, donc $(BB') \parallel (AA')$. □

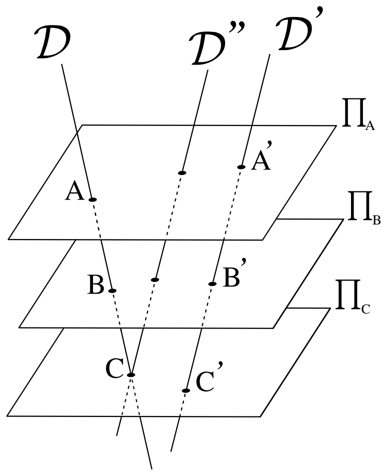


2 Applications

2.1 Théorème de Thalès (et réciproque) dans l'espace

Théorème : soit trois plans **parallèles** Π_A, Π_B et Π_C, une droite $\mathcal{D}$ qui coupe respectivement ces plans en A, B et C, $\mathcal{D}'$ une autre droite qui coupe respectivement ces plans en A', B' et C'. Alors : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$

preuve : on trace $\mathcal{D}''$ une droite parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par C. On applique le théorème de Thalès dans le plan formé par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ (on se ramène à une configuration de Thalès dans le plan) puis utlilisation des parallélogrammes. □



Réciproque : soit A, B, C trois points d'une droite $\mathcal{D}$, et A', B' et C' trois points d'une seconde droite $\mathcal{D}'$ ces six points sont supposés distincts deux à deux. Alors si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles à un même plan.

preuve : on trace Π_A, Π_B et Π_C des plans parallèles passant respectivement par A,B et C, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ (ie Π_A est dirigée par $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'})$ passant par A, etc...). Le plan Π_A contient donc (AA'), Π_B contient donc (BB'), et Π_C coupe $\mathcal{D}'$ en un point C''. Par le théorème de Thalès, on a donc : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}}$. Or $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, donc $C' = C''$, donc le plan Π_C contient la droite (CC'), donc les plans Π_A, Π_B et Π_C passent par respectivement (AA'), (BB') et (CC'), et de mêmes vecteurs directeurs, donc ces trois plans sont parallèles. $\square$

rem : cette preuve est l'analogue de celle dans le plan.

2.2 Projection dans le plan

Définition (Projection) : Soit Δ et $\mathcal{D}$ deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$. La projection sur $\mathcal{D}$ parallèlement à Δ est l'application $p : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$ tel que $M' \in \mathcal{D}$ et $(MM') \mathbin{/\!/} \Delta$

remarque : un tel point M' existe et est unique puisque $\mathcal{D}$ et Δ n'ont pas la même direction (car sont sécantes).

Proposition : $p \circ p = p$ et $Fix(p) = \mathcal{D}$

Théorème : l'application p est affine, autrement dit l'application vectorielle associée π :
$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{P} & \to & \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} & \mapsto & \overrightarrow{M'N'} \end{array}$ où $M' = p(M)$ et $N' = p(N)$ est LINEAIRE.

remarque : le théorème de Thalès intervient dans la preuve qui suit. On a donc besoin de Thalès (si l'on suit le plan utilisé) pour montrer le caractère affine des projections dans le plan (idem dans l'espace).

preuve : -π est bien définie car ne dépend pas du choix du vecteur $\overrightarrow{MN}$, représentant choisi pour $\overrightarrow{u}$:
si $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_2N_2}$ alors $\pi(\overrightarrow{MN}) = \pi(\overrightarrow{M_2N_2})$).
-soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. $\exists M, N, P \in \mathcal{P}$ tq. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{NP}$, donc
$\pi(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}) = \pi(\overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{p(M)p(P)} = \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{p(N)p(P)} = \pi(\overrightarrow{MN}) + \pi(\overrightarrow{MN})$. Donc
$\pi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \pi(\overrightarrow{u}) + \pi(\overrightarrow{v})$

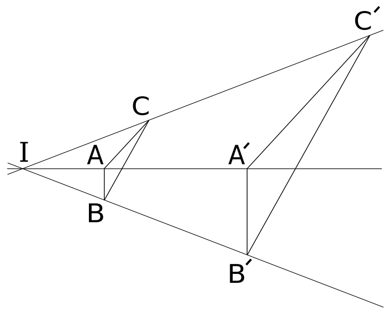
-Montrons que $\pi(\lambda.\vec{u}) = \lambda.\pi(\vec{u})$. Soit $\vec{u} \in \vec{P}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. $\exists M, N \in \mathcal{P}$ tq. $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$ et $\lambda.\vec{u} = \overrightarrow{MP}$. De plus $(MM') \mathbin{/\!/} (NN') \mathbin{/\!/} (PP')$, donc par le théorème de Thalès : $\dfrac{\overline{M'N'}}{\overline{N'P'}}=\dfrac{\overline{MN}}{\overline{MP}}=\dfrac{1}{\lambda}$ donc $\lambda.\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'P'}$, ie $\lambda.\pi(\vec{u})=\pi(\lambda.\vec{u})$ □

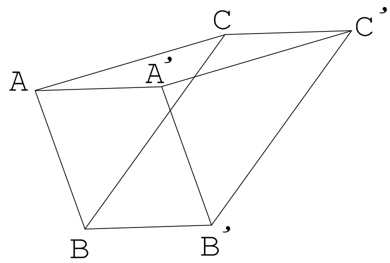
2.3 Le théorème de Desargues

Le théorème suivant est vrai dans un espace affine quelconque.

Théorème : soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles non plats d'un espace affine avec A, A' distincts ainsi que B, B' et C, C'. Si les côtés $[AB]$,$[BC]$,$[CA]$ du premier triangle sont respectivement parallèles aux côtés $[A'B']$,$[B'C']$,$[C'A']$ du second, les droites (AA'),(BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

preuve : si (AA'),(BB'),(CC') ne sont pas parallèles, deux d'entre elles, par exemple (AA') et (BB') se coupent en un point I. Par parallélisme de (AB) et $(A'B')$ et le théorème de Thalès, on a $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}=\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}} = k$.
Soit C'' le point de la droite (IC) tel que $\dfrac{\overline{IC''}}{\overline{IC}} = k$; par la réciproque du théorème de Thalès plan, $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \dfrac{\overline{IC''}}{\overline{IC}}$ implique $(AC)\|(A'C'')$ et $\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}} = \dfrac{\overline{IC''}}{\overline{IC}}$ implique $(BC)\|(B'C'')$; on a donc $(A'C'') = (A'C')$ et $(B'C'') = (B'C')$ d'où $C'' = C'$ puisque ces deux points sont à l'intersection de $(A'C')$ et $(B'C')$. C' est donc alignés avec I et C : $(AA'), (BB')$ et (CC') concourantes. Lorsque (AA') et (BB') sont parallèles, $ABB'A'$ est un parallélogramme. Soit C'' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$: $ACC''A'$ et $BCC''B'$ sont donc des parallélogrammes et l'on a $(AC) \mathbin{/\!/} (A'C'')$ et $(BC) \mathbin{/\!/} (B'C'')$; on termine comme précédemment. □

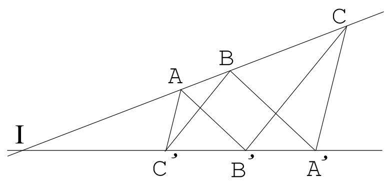


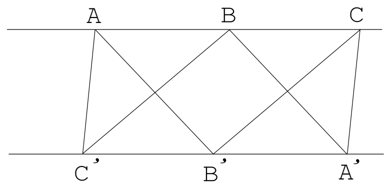


2.4 Le théorème de Pappus

Théorème : soit Δ et Δ' deux droites distinctes d'un plan affine, A, B, C trois points distincts sur *Delta*, et A', B', C' trois points distincts sur Δ' (tous distincts du point d'intersection éventuel de Δ et Δ'). Alors, si (AB') est parallèle à (BA') et si (BC') est parallèle à (CB'), alors (CA') est parallèle à (AC').

preuve : si Δ et Δ' sont sécantes en I : par le théorème de Thalès, le parallélisme de (AB') et $(A'B)$ (resp.de (BC') et $(B'C)$) implique $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}}=\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IA}}$ (resp. $\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}}=\dfrac{\overline{IC}}{\overline{IB}}$). Par multiplication de ces égalités, on obtient $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IC'}}=\dfrac{\overline{IC}}{\overline{IA}}$ et la réciproque du théorème de Thalès implique que (AC') est parallèle à $(A'C)$.
Si Δ et Δ' sont parallèles, l'hypothèse du théorème fait que $ABA'B'$ et $BCB'C'$ sont des parallélogrammes ; on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$, et par addition de ces égalités : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA'}$; on en déduit que $ACA'C'$ est un parallélogramme et que (AC') est parallèle à $(A'C)$. □

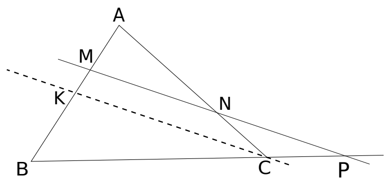




2.5 Le théorème de Ménélaüs

Théorème : soit ABC un triangle non applati, et M, N, P trois points appartenant aux droites respectives $(AB), (AC), (BC)$, distincts des sommets de ABC. Alors : M, N, P alignés $\Leftrightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$

preuve : $(\Rightarrow)$ la parallèle à (MP) passant par C coupe (AB) en K. Le théorème de Thalès entraine :
$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MK}}$ et $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\frac{\overline{MK}}{\overline{MA}}$ donc $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$
$(\Leftarrow)$ si M, N, P vérifient $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$, notons $\{P'\}=(MN) \cap (BC)$. Donc d'après la condition nécéssaire du théorème de Ménélaüs : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$, donc $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$
donc $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}}$ d'où $P = P'$ □



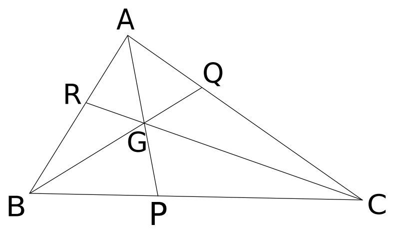
2.6 Le théorème de Ceva

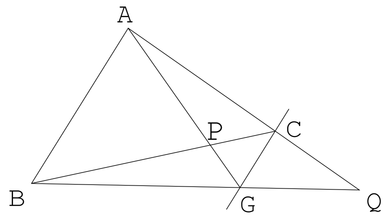
Théorème : soit ABC un triangle non applati, et P, Q, R trois points appartenant aux droites respectives $(BC), (CA), (AB)$, distincts des sommets de ABC. Alors :
$(AP), (BQ), (CR)$ sont concourantes ou parallèles $\Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$

remarque : ce théorème implique que les médianes d'un triangle sont concourantes, car les trois rapports figurant dans la relation donnée sont égaux à -1.

preuve :$(\Rightarrow)$ on peut déduire le théorème de Ceva de celui de Ménélaüs : si les trois droites se coupent en G, la droite (CR) coupe les côtés du triangle ABP en C, G, R. Par le théorème de Ménélaüs, on a $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}.\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}}.\frac{\overline{GP}}{\overline{GA}} = 1$. De même, la droite (BQ) coupe les côtés du triangle APC en B, G, Q donc $\frac{\overline{GA}}{\overline{GP}}.\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1$. En multipliant les deux égalités obtenues, on obtient $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$
$(\Leftarrow)$ Réciproquement, supposons $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$. Si les droites $(AP), (BQ), (CR)$ ne sont pas parallèles, deux d'entres elles, par exemple (AP) et (BQ) se coupent en un point G. La droite (CG) coupe alors (AB) en un point R' : en effet si elle était parallèle à (AB), le théorème de Thalès impliquerait $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$ car ces deux rapports sont égaux à $\frac{\overline{AB}}{\overline{GC}}$, ce qui impliquerait avec l'hypothèse $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$ ce qui est absurde.

Le théorème de Ceva dans le sens direct implique $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = -1$, ce qui entraîne $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}}$, d'où $R = R'$. Les trois droites initiales concourent donc en G. □





3 Compléments

3.1 Changements 2006

Attention aux changements par rapport à l'année 2005 : le titre change (anciennement : Théorème de Thalès. **Projection dans le plan et l'espace. Caractère affine des projections**). Plan en 2005 : après le théorème de Thalès, les projections.
-En 2005, on pouvait présenter la leçon de deux façons : soit présenter le théorème de Thalès en premier (preuve via mesure algébrique), puis les projections (preuves via le théorème de Thalès) : c'est le choix dans cette leçon ; soit définir d'abord les projections, puis le théorème de Thalès via les projections).
-Pour plus d'infos sur les preuves des projections : cf. exposé 33.

3.2 Projection dans l'espace

Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine. Si F est un sous-espace affine de E, on note $F = A + \overrightarrow{F} := \{M \in E, \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}\}$

Définition : soit F et G deux sous-espaces affines de E de direction respectives $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$, supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$ (ie $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$: $E = F + G$ et $F \cap G = \{O_E\}$).
La projection sur F parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est l'application $p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & M' \end{array}$ tel que $F \cap (M + \overrightarrow{G}) = \{M'\}$

Théorème : la projection p sur F parallelement à G est affine, autrement dit l'application vectorielle associée π : $\begin{array}{rcl} \overrightarrow{P} & \to & \overrightarrow{P} \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN} & \mapsto & \overrightarrow{M'N'} \end{array}$ où $M' = p(M)$ et $N' = p(N)$ est LINEAIRE.

Propriété : les projections conservent les barycentres, l'alignement, les rapports des mesures algébriques, les rapports des mesures vectorielles.

preuve : soit p application affine, donc propriétés vraies (ce sont mêmes des caractérisations des applications affines). □