Exposé 23 : Droites et plans de l'espace. Positions relatives; plans contenant une droite donnée.

Prérequis[1] : -géométrie plane
-Espaces vectoriels
-produit scalaire, produit vectoriel

Cadre de la leçon : $(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}})$ espace affine.

1 Droites et plans de l'espace

1.1 Droite de l'espace

Définition : soit A un point, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ vecteur de l'espace. La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points de l'espace tel que $\exists k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}$. Notation : $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$

Proposition : soient A,B distincts. Alors il existe une unique droite passant par A et B

1.2 Plan de l'espace

Définition : soit A un point, $\overrightarrow{n} \neq 0$ un vecteur de l'espace. Le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$. Notation : $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{n})$

Proposition : soient A, B, C distincts non alignés, alors il existe un unique plan passant par A,B,C

remarque : soient A, B deux points distincts de l'espace. Alors $(A, B) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB}) \in \mathcal{P}$

2 Position relative de droites et de plans de l'espace

2.1 Position relative de deux droites

Définition : soit $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$, $\mathcal{D}'(A, \overrightarrow{u'})$.
On dit que : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires (notation : $\mathcal{D} \mathbin{/\!/} \mathcal{D}'$).
On dit que : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan.

Théorème :
-si $\mathcal{D} \mathbin{/\!/} \mathcal{D}'$ alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires et $\mathcal{D} \cap \mathcal{D} = \emptyset$
-si $\mathcal{D} \not\mathbin{/\!/} \mathcal{D}'$:
– $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ coplanaires, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{I\}$
– $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non coplanaires, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$

preuve : si $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u}) \mathbin{/\!/} \mathcal{D}'(A', \overrightarrow{u'})$, soit $B \neq A \in \mathcal{D}$ et $B' \neq A' \in \mathcal{D}'$, soit $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{n})$ tq. $A, B, A' \in \mathcal{P}$. $\mathcal{D} \in \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$. Montrons que $\mathcal{D}' \in \mathcal{P}$. $B \in \mathcal{D}'$ donc $\exists k \in \mathbb{R}$ tq. $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{u'}$ or $\exists p \in \mathbb{R}$ tq. $\overrightarrow{u'} = p.\overrightarrow{u}$, donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq. $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{n} = 0$, donc $B' \in \mathcal{P}(A', \overrightarrow{n}) = \mathcal{P}$, etc. □

[1] Tapé par Gwendal le 16/11/2006. Réalisé avec LaTeX, Inkscape pour les dessins.

2.2 Position relative de deux plans

Définition : soient soit $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{n})$, $\mathcal{P}'(A', \overrightarrow{n'})$ distincts. On dit que $\mathcal{P} /\!/$ si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires

Théorème :
-si $\mathcal{P} /\!/ \mathcal{P}'$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \varnothing$
-si $\mathcal{P} \not\!/\!/ \mathcal{P}'$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$
-$\mathcal{P} /\!/ \mathcal{P} \Leftrightarrow$ toute droite de $\mathcal{P}$ est parallèle à (au moins) une droite de $\mathcal{P}'$

2.3 Position relative d'une droite et d'un plan

Définition : on dira que $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{P}(A', \overrightarrow{n})$ sont parallèles si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 0$.

Théorème :
-si $\mathcal{D} /\!/ \mathcal{P}$, alors soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing$, soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et dans ce cas $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D}$
-si $\mathcal{D} \not\!/\!/ \mathcal{P}$ alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\}$
-$\mathcal{D} /\!/ \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{D}$ parallèle à (au moins) une droite de $\mathcal{P}$

3 Plan contenant une droite

Définition : soit $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$. On appelle faisceau de plan définis par $\mathcal{D}$ l'ensemble de tous les plans contenant $\mathcal{D}$.

remarque : toute droite est intersection de deux plans sécants.

4 Compléments

4.1 Changements, bugs

-Attention aux changements. 2005 : Droites et plans de l'espace. **Equations**. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.
La leçon est ainsi légèrement allégée (en particuluer des équations paramétriques).
Le paragraphe 3 perd beaucoup de son intérêt (un peu creux) : y repenser...

4.2 Produit vectoriel

On peut définir le produit vectoriel de plusieurs manières différentes.

4.2.1 Définition classique

Définition (Produit mixte)
Soit $\overrightarrow{E}$ l'espace vectoriel orienté de dimension 3. On définit le produit mixte de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ (noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$) par $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] := det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de $\overrightarrow{E}$. Le produit mixte est indépendant de la b.o.n de $\overrightarrow{E}$ choisie.

Théorême-Définition (Produit vectoriel) : Pour tout couple de vecteur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{E}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{V}$ tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{E}$, on a : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \overrightarrow{V}.\overrightarrow{w}$. Ce vecteur est appelé produit vetoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

4.2.2 Définitions plus géométrique

Définition (Produit vectoriel) :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non-colinéaires de $\overrightarrow{E}$, et $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orientant $\mathcal{P}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} := \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).\overrightarrow{k}$

Définition (Produit vectoriel Terracher) :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{E}$. On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$, le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ défini ainsi :
-lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$
-lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (direction) ; $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base directe (sens) ;$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (norme).

Définition (Coordonnées) :
soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - a'b \end{pmatrix}$ est appelé produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$, et est noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

4.2.3 Propriétés du produit vectoriel

Le produit vectoriel est bilinéaire, antisymétrique, alternée.
Dans la b.o.n $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où $\overrightarrow{u}(x, y, z), \overrightarrow{v}(x', y', z')$, on a :
$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (yz' - zy')\overrightarrow{i} + (x'z - xz')\overrightarrow{j} + (xy' - yx')\overrightarrow{k}$
Si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ b.o.n de $\mathcal{E}$, alors $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j}$.

4.3 Questions

-On introduit le plan avec le produit scalaire. Pourtant les plans existent dans les espaces affines non euclidiens. Où est le problème ?
Il n'y a pas de problème : on a fait le choix de définir les plans ainsi car c'est plus simple à introduire d'un point de vue pédagogique. De plus, on peut toujours rajouter un produit scalaire à un espace affine.

-Comment savoir si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ directe ? Soit avec le bonhomme d'ampère (orientation accesible en secondaire, naïve), soit avec le déterminant : $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, l'espace étant supposé orienté (dans le sens direct) par ce triplet.