Exposé 19 : Etude de la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$ où $a, b, z \in \mathbb{C}$. Lignes de niveaux pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.

Prérequis[1] : -nombres complexes (affixes, module, arguments, représentations géométriques)
-propriétés des similitudes
-expressions complexes des transformations du plan
-équations complexes des droites et des cercles
-continuité, dérivabilité, intégrale
-barycentre, cocyclicité, produit scalaire
-théorème de l'arc capable

Cadre : $(\mathcal{P}, \overrightarrow{P})$ plan affine euclidien, muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient M, A, B, C quatres points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z, a, b, c
Niveau : Terminale S

1 Etude de la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$ où $a, b, z \in \mathbb{C}$, $z \neq b$

1.1 Bijectivité

$D_f = \mathbb{C} - \{b\}$. Si $a = b$ alors f est constante égale à 1.

Théorème : Si $a \neq b$, l'application $f : \mathbb{C}\text{-}\{b\} \to \mathbb{C}\text{-}\{1\}$ est une bijection, de fonction réciproque $f^{-1}(z) = \dfrac{a-bz}{1-z}$

preuve : $Z = \dfrac{z-a}{z-b} \Leftrightarrow Z.(z-b) = z-a \Leftrightarrow z = \dfrac{a-bZ}{1-Z}$ avec $Z \neq 1$. De plus $a = b \Leftrightarrow \dfrac{z-a}{z-b} = 1$ donc $Z = 1$ n'admet aucun antécédent par f, et nombre complexe $Z \neq 1$ possède un unique antécédent, à savoir $z = \dfrac{a-bZ}{1-Z}$ (il y a bien bijection car on a trouvé la fonction réciproque). □

2 Etudes des transformations φ associées à f

Proposition : f se décompose en $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ où :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z-b \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-\{0\} & \to & \mathbb{C}-\{0\} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z} \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (b-a).z \end{array} \text{ et } f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+1 \end{array}$$

Notation : on appelle $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les applications de $\mathcal{P}$ associées respectivement à f, f_1, f_2, f_3, f_4
Remarque : φ_1 et φ_4 sont des translations, φ_3 est une similitude directe de centre O et de rapport $|b-a|$ donc les cercles sont transformés en cercles, et les droites en droites (parallèles) par ces applications. Le seul cas non trivial est φ_2

[1] Exposé tapé et présenté par Gwendal Haudebourg le 11/10/2006, corrigé par M.Q. Réalisé avec LaTeX.

Lemme : soient une droite $\mathcal{D}$ et le cercle $C(I,r)$, $r>0$. Alors :
(i) Si $O\in\mathcal{D}$: $\varphi_2(\mathcal{D}-\{O\})$ est une droite passant par O, privé de O.
(ii) Si $O\notin\mathcal{D}$: $\varphi_2(\mathcal{D})$ est un cercle passant par O, privé de O.
(iii) Si $I=O$: $\varphi_2(C)$ est le cercle $C(O,\dfrac{1}{r})$.
(iv) Si $O\in C$: $\varphi_2(C-\{O\})$ est une droite ne passant pas par O.
(v) Si $O\notin C$: $\varphi_2(C)$ est un cercle ne passant pas par O.

Théorème : soient une droite $\mathcal{D}$ et le cercle $C(I,r)$, $r>0$. On note C le point d'affixe 1. Alors :
(i) Si $B\in\mathcal{D}$: $\varphi(\mathcal{D}-\{B\})$ est une droite passant par C, privé de C.
(ii) Si $B\notin\mathcal{D}$: $\varphi(\mathcal{D})$ est un cercle passant par C, privé de C.
(iii) Si $I=B$: $\varphi(C)$ est le cercle $C'(C,\dfrac{|b-a|}{r})$.
(iv) Si $B\in C$: $\varphi(C-\{B\})$ est une droite ne passant pas par C.
(v) Si $B\notin C$: $\varphi(C)$ est un cercle ne passant pas par C.

3 Lignes de niveaux

3.1 Pour le module

Définition : on appelle ligne de niveau de module de f associé au réel k l'ensemble
$E_k=\{M(z) tq. z\in\mathbb{C}-\{b\},|\dfrac{z-a}{z-b}|=k\}$

Proposition :
-Si $k<0$, $E_k=\phi$
-Si $k=0$, $E_k=\{A(a)\}$
-Si $k=1$, $E_k=med[AB]$
-Si $k\neq1$, $k>0$, E_k est le cercle de diamètre $[IJ]$
où $I=bar\{(A,1);(B,k)\}$ et $J=bar\{(A,1);(B,-k)\}$

preuve : si $k=1$, $z\in E_1\Leftrightarrow MA=MB$. Cela montre que E_1 est la médiatrice de $[AB]$
si $k\neq1$, $k>0$, $z\in E_k\Leftrightarrow MA=k.MB\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2=k^2.\overrightarrow{MB}^2\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}+k.\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-k.\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow(1+k).\overrightarrow{MI}.(1-k).\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{0}$ où $I=bar\{(A,1);(B,k)\}$ et $J=bar\{(A,1);(B,-k)\}\Leftrightarrow$
$(1+k).(1-k)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$ donc E_k est le cercle de diamètre $[IJ]$ □

3.2 Pour l'argument

Posons $F_\alpha=\{M(z) tq. z\in\mathbb{C}-\{b\},arg(\dfrac{z-a}{z-b})=\alpha[\pi]\}$ et $G_\alpha=\{M(z) tq. z\in\mathbb{C}-\{b\},arg(\dfrac{z-a}{z-b})=\alpha[2\pi]\}$

Proposition :
(i) Si $\alpha=0[\pi]$, alors $F_\alpha=(AB)-\{A,B\}$
(ii) Si $\alpha=0[2\pi]$, alors $G_\alpha=(AB)-[AB]$
(iii) Si $\alpha=\pi[2\pi]$, alors $G_\alpha=]AB[$
(iv) Si $\alpha\neq0[\pi]$: soit $T\in\mathcal{P}$ tel que $(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})=\alpha[2\pi]$, alors $F_\alpha=C$-$\{A,B\}$ où C est le cercle passant par A et B et tangent en A à (AT)
(v) Si $\alpha\neq0[2\pi]$: G_α est l'arc capable de $[AB]$ associé à α. C'est l'arc ouvert $]\widehat{AB}[$ de C contenu dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas T.

preuve : (i), (ii) et (iii) évidentes. (iv) soit $T\in\mathcal{P}$ tel que $(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})=\alpha[2\pi]$, et C le cercle décrit ci-dessus. Soit B' le point diamètralement opposé à A. (AT) est tangente à C en A donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'})=\dfrac{\pi}{2}-\alpha[2\pi]$. Le

triangle ABB' est rectangle en B donc $(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'B}) = \pi - \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha[2\pi]$. Ainsi, d'après le théorème de l'arc capable : $\forall M \in C$, $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \alpha[\pi]$ ie $arg(\frac{z-a}{z-b}) = \alpha[\pi]$
(v) idem en rappelant que les mesures principales qui sont du même signe se situent dans le même demi-plan. □

4 Applications

4.1 Alignement

Montrez que A, B, M alignés sisi $f(z) \in \mathbb{R}$

4.2 Orthogonalité

Montrez que $(BM) \perp (AM)$ sisi $f(z)$ est un imaginaire pur

4.3 Cocyclicité

Montrez que $M(z), A(a), B(b), C(c)$ sont alignés ou cocycliques sisi $\frac{f(z)}{f(c)} \in \mathbb{R}$

4.4 Demi-plan

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}$ Montrez que f envoie le demi-plan supérieur sur le disque unité ouvert (centré en O).

5 Compléments

5.1 Applications

(1) A, B, M alignés ie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$=$0[\pi] \Leftrightarrow arg(\frac{z-a}{b-a}) = 0[\pi] \Leftrightarrow arg(f(z)) = 0[\pi] \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$

(2) A, B, M alignés ie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$=$\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow arg(\frac{z-a}{b-a}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}[\pi]$
$\Leftrightarrow f(z)$ est un imaginaire pur

(3) M, A, B, C alignés ou cocycliques ie $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})[\pi] \Leftrightarrow arg(\frac{z-a}{z-b}) = arg(\frac{c-a}{c-b})[\pi]$
$\Leftrightarrow arg(f(z)) = arg(f(c))[\pi] \Leftrightarrow arg(\frac{f(z)}{f(c)}) = 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{f(z)}{f(c)} \in \mathbb{R}$

(4) Demi-plan : soit $M(z)$, $A(i)$, $B(-i)$. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a $|f(z)| = \frac{MA}{MB}$. De plus, $(O, \vec{i})$ est la médiatrice du segment $[AB]$. On sait que (régionnement du plan par une médiatrice) :
$\mathcal{P}^+ = \{M \in \mathcal{P}, MA < MB\}$, $\Delta = \{M \in \mathcal{P}, MA = MB\}$ et $\mathcal{P}^- = \{M \in \mathcal{P}, MA > MB\}$.
Donc si $M \in \mathcal{P}^+$, alors $|f(z)| < 1$, donc $f(M)$ appartient au disque ouvert unité.Ainsi, tout point du demi-plan supérieur est envoyé dans le disque ouvert unité (mais on n'a pas montré que le disque ouvert est entièrement atteint, etc. à finir...).

5.2 Etudes des transformations φ associées à f

5.2.1 Equation complexe d'une droite et d'un cercle

Proposition :

(i) Pour toute droite $\mathcal{D}$ du plan, il existe $(\omega, r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ tel que $M(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overline{\omega}.z + \omega\overline{z} + r = 0$
(ii) Réciproquement, pour tout couple $(\omega, r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$, $\{M(z) \in \mathcal{P}, \overline{\omega}.z + \omega\overline{z} + r = 0\}$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(\omega)$
(iii) Pour tout cercle C de $\mathcal{P}$, il existe $(\omega, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tel que : $M(z) \in C \Leftrightarrow z.\overline{z} - \overline{\omega}.z - \omega.\overline{z} + k = 0$
(iv) Réciproquement, pour tout couple $(\omega, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $\{M(z) \in \mathcal{P}, z.\overline{z} - \overline{\omega}.z - \omega.\overline{z} + k = 0\}$ est :
-L'ensemble vide si $|\omega|^2 < k$
-$\{\Omega(\omega)\}$ si $|\omega|^2 = k$
-Le cercle de centre $\Omega(\omega)$, de rayon $\sqrt{|\omega|^2 - k}$ si $|\omega|^2 > k$

preuve : (i) soit $\mathcal{D}$ une droite du plan dont une équation est $ax + by + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$. On pose $z = x + iy$ et $\omega = a + ib$
$M(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow Re(\overline{\omega}z) + c = 0$
donc $M(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overline{\omega}z + \omega\overline{z}) + c = 0 \Leftrightarrow \overline{\omega}z + \omega\overline{z} + 2c = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overline{\omega}z + \omega\overline{z}) + c = 0 \Leftrightarrow \overline{\omega}z + \omega\overline{z} + r = 0$
(ii) On pose $z = x + iy$ et $\omega = a + ib$
$\{M(z) \in \mathcal{P}, \overline{\omega}z + \omega\overline{z} + r = 0\}$=$\{M(z) \in \mathcal{P}, 2Re(\overline{\omega}z) + \rho = 0\}$=$\{M(z) \in \mathcal{P}, 2(ax + by) + \rho = 0\}$
=$\{M(z) \in \mathcal{P}, ax + by + \frac{\rho}{2} = 0\}$ ce qui est bien l'équation d'une équation d'une droite dont le vecteur normal est $\overrightarrow{n} = (a, b)$
(iii) Soit C le cercle de centre $\Omega(\omega)$, de rayon R, avec $\omega = a + ib$
$M(z) \in C \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \Leftrightarrow |z - \omega|^2 = R^2 \Leftrightarrow (z - \omega)(\overline{z} - \overline{\omega}) = R^2 \Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + \overline{\omega}\omega = R^2$
$M(z) \in C \Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + a^2 + b^2 - R^2 = 0$
Donc $M(z) \in C \Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0$ en posant $k = a^2 + b^2 - R^2$
(iv) On pose $z = x + iy$ et $\omega = a + ib$
$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(ax + by) + k = 0$
$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2 + k = 0$
$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + k = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = |\omega|^2 - k$
-si $|\omega|^2 < k$, alors il n'y a pas de solution.
-si $|\omega|^2 = k$, alors $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (a, b)$, d'où unique point $\Omega(\omega)$
-si $|\omega|^2 > k$, alors on pose $R^2 = |\omega|^2 - k$, et on obtient l'équation du cercle de rayon R et de centre $\Omega(\omega)$. □

preuve : (Lemme) (i) une équation d'une droite $\mathcal{D}$ passant par O s'écrit $\overline{\omega}.z + \omega.\overline{z} = 0$. Or $f_2(z) = \frac{1}{z}$
donc $\varphi_2(\mathcal{D} - \{O\})$ a pour équation $\frac{\overline{\omega}}{z} + \frac{\omega}{\overline{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\overline{\omega.z + z\omega}}{z.\overline{z}} = 0 \Leftrightarrow \overline{\omega.z} + z.\omega = 0$ ce qui est l'équation d'une droite passant par O, privé de O
(ii) idem avec $\mathcal{D} : \overline{\omega}.z + \omega.\overline{z} + \rho = 0$. On obtient alors $\overline{\omega.z} + \omega.z + \rho.z.\overline{z} = 0$ qui est l'équation d'un cercle passant par O, privé de O
(iii) On cherche l'image de $C(O, r)$ par φ_2. L'équation du cercle C est donc $z.\overline{z} - r^2 = 0$ (car $\omega = 0$ et $r = \sqrt{-k}$). En appliquant f_2, on obtient : $\frac{1}{z.\overline{z}} - r^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - r^2.z.\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z.\overline{z} - \frac{1}{r^2} = 0$ ce qui est l'équation d'un cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{r}$
(iv) idem avec $C(O, \frac{1}{r}) : z.\overline{z} - \omega.\overline{z} - \overline{\omega}.z = 0$. On obtient alors $\omega.z + \overline{\omega.z} - 1 = 0$ qui est l'équation d'une droite ne passant pas par O.
(v) Si $O \notin C$, alors $C : z.\overline{z} - \omega.\overline{z} - \overline{\omega}.z + k = 0$ avec $k \neq 0$. On obtient alors $z.\overline{z} - \frac{\omega}{k}.z - \frac{\overline{\omega}}{k}.\overline{z} + \frac{1}{k} = 0$ qui est l'équation d'un cercle ne passant pas par O. □