Exposé 25 : Equation cartésienne d'une droite du plan. Problème d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes

Prérequis[1] : -$\mathcal{D}(A,\vec{u})$ droite du plan $\Leftrightarrow \exists\, A \in \mathcal{P}, \exists \vec{u} \neq \vec{0}$ tel que $\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P}, \exists k \in \mathbb{R} \text{ tq. } \overrightarrow{AM} = k.\vec{u}\}$
-colinéarité de deux vecteurs : les vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ sont colinéaires $\Leftrightarrow det(\vec{u},\vec{v}) = 0$ ie $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$
-deux droites sont parallèles ssi leurs vecteurs directeurs sont colinéaires

Cadre : on se place dans $(\mathcal{P},\vec{\mathcal{P}})$ plan affine muni d'un repère $\mathcal{R} = (O,\vec{i},\vec{j})$

1 Equation cartésienne d'une droite du plan

1.1 Cas général

Théorème : (i) Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b) \neq (0,0)$ tq.

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow ax + by + c = 0$$

(ii) Réciproquement, soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq. $(a,b) \neq (0,0)$. L'ensemble $\{M(x,y) \in \mathcal{P}, ax + by + c = 0\}$ est une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b,a)$

preuve : (i) soit $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ la droite du plan passant par $A(x_0,y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta)$.
$M(x,y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0$
$M(x,y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ (avec $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$).
(ii) Soit $\mathcal{D} := \{M(x,y) \in \mathcal{P}, ax + by + c = 0\}$. $\mathcal{D}$ est clairement non vide. Soit $A(x_0,y_0) \in \mathcal{D}$ et $M(x,y) \in \mathcal{D}$ ie $ax_0 + by_0 + c = 0$ et $ax + by + c = 0$ d'où $ax + by + c = ax_0 + by_0 + c \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow det(\vec{u},\overrightarrow{AM})$ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & x - x_0 \\ a & y - y_0 \end{vmatrix} = 0$ où $\vec{u}(-b,a)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_0, y - y_0)$ donc bien une droite $\mathcal{D}(A,\vec{u})$ □

Définition : L'écriture $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ est appelé l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$

1.2 Equation réduite

Proposition : si $\mathcal{D}$ non parallèle à $(O,\vec{j})$, elle possède une **unique** équation de la forme $y = mx + p$ (1)

preuve : (existence) soit $\mathcal{D}$ une telle droite. $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$, et pour vecteur directeur $\vec{u}(-b,a)$ non colinéaire à $\vec{j}(0,1)$ ie $det(\vec{u},\vec{j}) = \begin{vmatrix} -b & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ donc $b \neq 0$ et $y = \dfrac{-a}{b}x - c$
(unicité : évident) □

Définition : (1) est appelée équation réduite de $\mathcal{D}$. m est le coefficient directeur de $\mathcal{D}$, et p l'ordonnée à l'origine de $\mathcal{D}$.

remarque : si $\mathcal{D} \,/\!\!/\, (O,\vec{j})$, alors elle admet une équation de la forme $x = C$, $C \in \mathbb{R}$. En effet, si $\vec{u}(a,b) = (0,m)$ dirige $\mathcal{D}$, alors $M(x,y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $b = 0$ donc $x = \dfrac{-c}{a} = C$

[1] Exposé fortement inspiré de celui de Johann, tapé par Gwendal Haudebourg, réalisé avec LaTeX, Inkscape pour les dessins. Mis à jour le 27/06/2007

2 Problèmes d'intersection et de parallélisme

2.1 Cas de deux droites

Théorème : soit $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, et $\mathcal{D}'$ la droite du plan d'équation $a'x + b'y + c' = 0$, $(a', b') \neq (0, 0)$. Alors :
$\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{D}' \iff \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$

preuve : $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{u}(-b, a)$ et $\overrightarrow{v}(-b', a')$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$

□

Proposition : soit $\mathcal{D}$ une droite du plan d'équation réduite $y = mx + p$, et $\mathcal{D}'$ une droite du plan d'équation réduite $y = m'x + p'$. Alors : $\mathcal{D}$ parallèle à $\mathcal{D}' \iff m = m'$

preuve : se ramener à une équation cartésienne et utiliser le théorème précédent : $\mathcal{D} : y - mx - p = 0$, $\mathcal{D}' : y - mx' - p' = 0$. $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow 1.(-m') + m.1 = 0 \Leftrightarrow m = m'$ □

2.2 Cas de trois droites

Théorème : soit $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, et $\mathcal{D}'$ la droite du plan d'équation $a'x + b'y + c' = 0$, $(a', b') \neq (0, 0)$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ étant sécantes en un point A. Alors :

$$\mathcal{D}'' \text{ droite du plan passe par } A \iff D'' : \lambda.(ax + by + c) + \lambda'.(a'x + b'y + c') = 0,\ (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

Proposition : soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$, $(a', b') \neq (0, 0)$ et $\mathcal{D}''$: $a''x + b''y + c'' = 0$. Alors :
$\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ concourantes ou parallèles $\iff \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$

3 Applications

Exercice 1 : montrer que les médianes d'un triangle ABC non applati sont concourantes.
Exercice 2 : théorème de Ménélaüs : soit ABC un triangle non applati, $R \in (AB)$, $Q \in (AC)$ et $P \in (BC)$. Montrer que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 \iff P, Q, R$ alignés

preuve : soit le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Alors $A=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \end{pmatrix}$
$(BC) : x + y = 1$ donc $P = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda - 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RA} = \begin{pmatrix} -\nu \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RB} = \begin{pmatrix} 1-\nu \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\mu \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{PB} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$ donc $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$; $\overrightarrow{RA} = \dfrac{-\nu}{1-\nu}$ donc $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \dfrac{\nu}{\nu - 1}$; $\overrightarrow{QC} = \dfrac{1-\mu}{-\mu}$ donc $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$

De plus P, Q, R alignés $\iff \begin{cases} \lambda.a + (1-\lambda).b + c = 0 \\ b.\mu + c = 0 \\ a.\nu + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c(\dfrac{-\lambda}{\nu} + \dfrac{\lambda}{\mu} - \dfrac{1}{\mu} + 1) = 0 \\ b = \dfrac{-c}{\mu} \\ a = \dfrac{-c}{\nu} \end{cases}$

De plus, $c \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ et $\lambda \neq 0$ (sinon contradiction), et : $(\dfrac{-\lambda}{\nu} + \dfrac{\lambda}{\mu} - \dfrac{1}{\mu} + 1) = 0 \Leftrightarrow \mu\nu$=$\lambda\mu$-$\lambda\nu$+$\nu$

Or $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}.\dfrac{\nu}{\nu - 1}.\dfrac{\mu - 1}{\mu} = 1 \Leftrightarrow \mu\nu$=$\lambda\mu$-$\lambda\nu$+$\nu$ (après calcul). Donc on a bien :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 \iff P, Q, R \text{ alignés}$$

□

4 Compléments

-il n'est absolument pas nécessaire dans cet exposé de ce placer dans un repère orthonormé (un repère quelconque du plan suffit), ie on sa place dans $\mathcal{P}$ plan affine (pas euclidien.
-pour désigner une droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, on utilisera la notations $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$; dans le cas euclidien, une droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ sera notée$\mathcal{D}(A, \overrightarrow{n})$.

4.1 preuves

Théorème : soit $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, et $\mathcal{D}'$ la droite du plan d'équation $a'x + b'y + c' = 0$, $(a', b') \neq (0, 0)$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ étant sécantes en un point A. Alors :

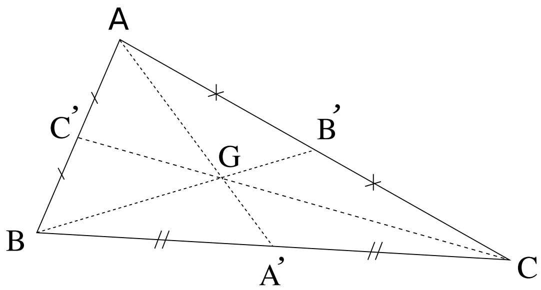
$$\mathcal{D}'' \text{ droite du plan passe par } A \Longleftrightarrow D'' : \lambda.(ax + by + c) + \lambda'.(a'x + b'y + c') = 0, \ (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

preuve : soit $f(x, y) := ax + by + c$ et $g(x, y) := a'x + b'y + c'$, $\mathcal{D}$=$\{M(x; y), f(x, y) = 0\}$, $\mathcal{D}'$=$\{M(x; y), g(x, y) = 0\}$
$(\Leftarrow)$ soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{A\}$ avec $A(x_A; y_A)$, et soit $\mathcal{D}'$=$\{M(x; y), h(x, y) = 0\}$ où
$h(x, y) := \lambda(ax + by + c)$+$\lambda'(a'x + b'y + c')$ pour un certain couple $(\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0; 0\}$. On vérifie facilement que $\mathcal{D}''$ est une droite, et on a : $f(x_A; y_A)$=0=$g(x_A; y_A)$, d'où $h(x_A; y_A) = 0$, donc $A \in \mathcal{D}''$
$(\Rightarrow)$ soit $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ et $A \in \mathcal{D}''$. Soit $N(x_N; y_N) \in \mathcal{D}'' \setminus \{A\}$. Soit
$h(x, y) := f(x_N, y_N).g(x, y) - f(x, y).g(x_N, y_N)$=$\lambda.f(x, y) - \lambda'.g(x, y)$ en posant $\lambda = f(x_N, y_N)$ et $\lambda' = g(x_N, y_N)$
Il est a noter que $(f(x_N, y_N); g(x_N, y_N)) \neq (0, 0)$ car $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont distinctes (car sécantes en un unique point A, et $N \neq A$) ; ainsi $(\lambda, \lambda') \neq (0, 0)$, et $h(x, y) = 0$ est bien une équation de droite du plan $\Delta = \{M(x; y) \in \mathcal{P}, h(x, y) = 0\}$.
De plus $h(x_A, y_A) = 0 = h(x_N, y_N)$, donc $\Delta = (AN)$ (car $A \in \Delta$ et $N \in \Delta$), donc $\Delta = \mathcal{D}''$, et on a :

$$D' : \lambda(ax + by + c) + \lambda'(a'x + b'y + c') = 0$$

□

Exercice 1 : montrer que les médianes d'un triangle ABC non applati sont concourantes.



On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On a donc $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$ $A'(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $B'(0; \frac{1}{2})$ et $C'(\frac{1}{2}; 0)$. De plus : $(AB) : y = 0$, $(AC) : x = 0$ et $(AA') : x - y = 0$
Equation de (CC') : $ax + by + c = 0$, or $(C, C') \in (CC')$ donc $\left\{ \begin{array}{l} a.0 + b + c = 0 \\ a.\frac{1}{2} + b.0 + c = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -c \\ a = -2c \end{array} \right.$
donc $(CC') : -2x - y + 1 = 0$
Equation de (BB') : $ax + by + c = 0$, or $(B, B') \in (BB')$ donc $\left\{ \begin{array}{l} a.1 + b.0 + c = 0 \\ a.0 + b.\frac{1}{2} + c = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -c \\ b = -2c \end{array} \right.$
donc $(BB') : -x - 2y + 1 = 0$
Soit $I(x_I, y_I) = (AA') \cap (CC')$, ie $\left\{ \begin{array}{l} x_I - y_I = 0 \\ -2x_I - y_I + 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_I = \dfrac{1}{3} = y_I$. On vérifie bien que $I \in (BB')$ car $-\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} + 1 = 0$, donc (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en I.