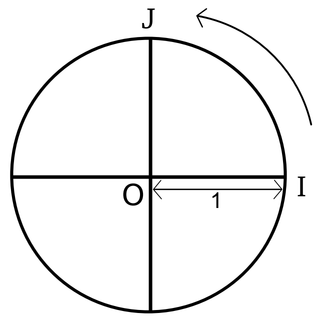
Trigonométrie

1 Enroulement de la droite numérique

1.1 Cercle trigonométrique

Définition : On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$. Un cercle trigonométrique est un cercle de centre O, de rayon 1 unité, que l'on muni d'un sens direct (le sens inverse des aiguilles d'une montre).

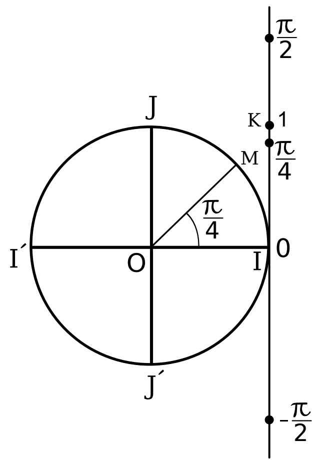


Remarque : un cercle trigonométrique étant de rayon 1 unité, sa circonférence totale est donc 2π. Ainsi la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IJ}$ est $\frac{\pi}{2}$ (un quart de la circonférence du cercle).

1.2 Enroulement de la droite numérique sur un cercle et radian

Soit C un cercle trigonométrique de centre O. Le repère orthonormé $(O; I; J)$ est dit direct : sur le cercle C, on se déplace de I vers J, selon le trajet le plus court, dans le sens direct.
Soit K le point de coordonnées $(1; 1)$. On munit la droite (IK) du repère $(I; K)$. La droite graduée ainsi formée représente la droite des réels ; on l'appelle **droite numérique**.

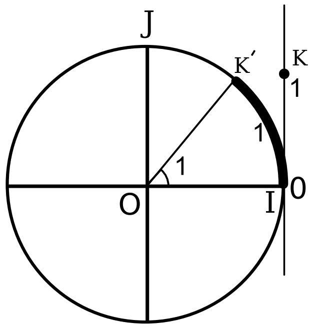
On "enroule" la droite (IK) sur le cercle C. Ainsi tout réel x de la droite (IK) vient en un point M sur le cercle C. On dit que M est l'image du réel x (sur l'exemple M est l'image du nombre réel $\frac{\pi}{4}$).

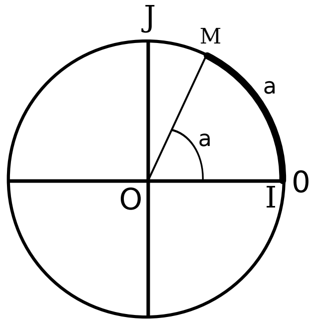


Exemples :
J est l'image du réel $\frac{\pi}{2}$, I' est l'image du réel π, J' est l'image du réel $\frac{-\pi}{2}$.

Propriété 1 : Soient x et x' deux nombres réels de la droite numérique, tel que $x' = x + k \times 2\pi$ avec k un nombre entier relatif. Alors x et x' viennent s'appliquer sur un même point du cercle C.
De même, si M est un point du cercle C image d'un nombre réel x, alors M est aussi le point image des nombres réels $x + k \times 2\pi$.

1.3 Une nouvelle unité



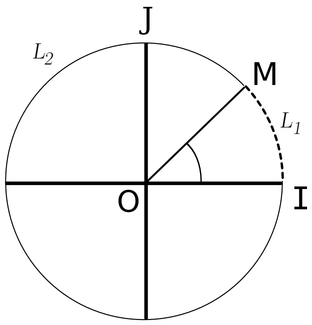


Supposons que lorsque l'on enroule la droite sur le cercle, le point K "arrive" en K'. On sait que $IK = 1$.
Il est légitime de définir une nouvelle unité, le **radian**, en confondant la valeur de l'angle au centre de $(\widehat{OI, OK'})$ et la longueur $IK = 1$.

Autrement dit :

-un angle de 1 radian est un angle au centre qui intercepte sur un cercle trigonométrique, un arc de longueur égale à 1.
-un angle de a radians est un angle au centre qui intercepte sur un cercle trigonométrique, un arc de longueur égale à a.

1.4 Angle orienté et mesure principale



Définition :
Pour tout point M du cercle, on associe les mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ suivantes :

-Si on parcourt le cercle de I à M dans le sens direct, alors $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})=L_1 + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{N}$.
-Si on parcourt le cercle de I à M dans le sens indirect, alors $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})=-L_2 - k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{N}$.

Remarques :
-la mesure d'un angle orienté est donc précédée d'un signe moins lorsqu'on se déplace dans le sens indirect sur le cercle trigonométrique.
-les nombres entiers positifs k et k' correspondent aux nombres de tours que l'on effectue pour aller de I à M.

Propriété 2 : on peut exprimer l'ensemble de toutes les mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ sous la forme $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})=L_1+k\times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Définition : La **mesure principale** d'un angle est la longueur du plus petit arc joignant I à M sur le cercle trigonométrique, précédé du signe plus si le point M est sur le demi-cercle supérieur, et du signe moins sinon.

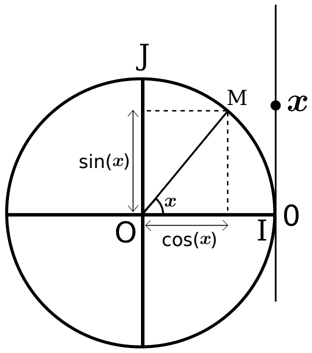
Remarque importante : Un angle orienté possède une **unique** mesure principale dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
Exemple : la mesure principale de $\dfrac{5\pi}{3}$ est $-\dfrac{\pi}{3}$ car $\dfrac{5\pi}{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

2.1 Cosinus et sinus d'un réel

Définition : Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé direct, et C un cercle trigonométrique de centre O. Soit M est un point de C, image du nombre réel x.

Le cosinus de x, noté $cos(x)$, est l'abscisse du point M. Le sinus de x, noté $sin(x)$, est l'ordonnée du point M.

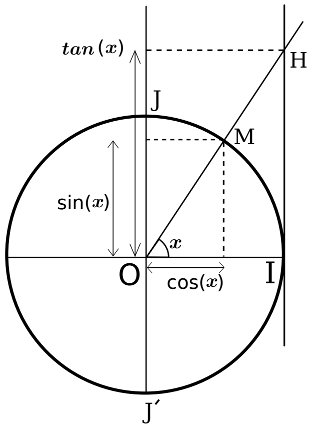


Exemples :
-Le réel $\frac{\pi}{2}$ a pour image J sur le repère. J a pour coordonnées $(1;0)$, donc $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
-De même, grâce au point I' de coordonnées $(-1;0)$, on a $cos(-\pi) = -1$ et $sin(-\pi) = 0$.

Propriété 3 : soit x un nombre réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Soit M son image sur le cercle trigonométrique. Alors on a :

$$cos(x) = cos(\widehat{IOM}) \text{ et } sin(x) = sin(\widehat{IOM})$$

2.2 Tangente d'un réel



Définition simplifiée : Soit la configuration géométrique ci-dessus (M étant un point du cercle trigonométrique différent des points J et J'). Alors la tangente de x, notée $\tan x$, est l'ordonnée du point H dans le repère orthonormée $(O; I; J)$.

Propriété 4 : Si $\cos x \neq 0$, on a : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Remarque : il est à noter que l'on a définit la tangente d'un réel x différent de $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{-\pi}{2}$, c'est à dire lorsque $\cos x \neq 0$.

2.3 Propriété

Propriété 5 : Pour tout nombre réel x, on a :

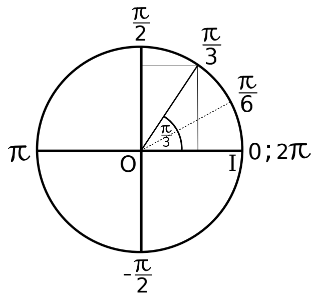
1) $cos^2 x + sin^2 x = 1$ 2) $\begin{cases} -1 \leqslant cos(x) \leqslant 1 \\ -1 \leqslant sin(x) \leqslant 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} cos(-x) = cos(x) \\ sin(-x) = -sin(x) \end{cases}$ 4) $\begin{cases} cos(x + 2\pi) = cos(x) \\ sin(x + 2\pi) = sin(x) \end{cases}$

5) $\begin{cases} cos(\pi + x) = -cos(x) \\ sin(\pi + x) = -sin(x) \end{cases}$ 6) $\begin{cases} cos(\pi - x) = -cos(x) \\ sin(\pi - x) = sin(x) \end{cases}$ 7) $\begin{cases} cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x) \\ sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x) \end{cases}$ 8) $\begin{cases} cos(\frac{\pi}{2} + x) = -sin(x) \\ sin(\frac{\pi}{2} + x) = cos(x) \end{cases}$

2.4 Valeurs remarquables

Grâce à ce que l'on vient de voir, on peut en déduire certaines valeurs remarquables du cosinus et du sinus :

angle en degré	0	30	45	60	90	180	360
angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0



Démonstration : vues en classe

Exercice 1 : Simplifier les expressions suivantes : $\cos(-\pi - \theta)$, $\sin(x - \frac{\pi}{2})$ et $\cos^2(-x) + \sin^2(\pi - x)$.

Exercice 2 : Exprimer à l'aide de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes :

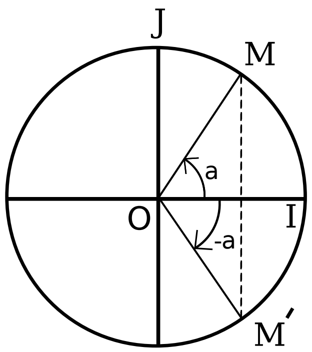
$$A = \cos(x + \pi) - \cos(-x) + 5\cos(x)$$
$$B = \sin(\pi - x) + 2\sin(x + 2\pi) + \sin(x + 3\pi)$$
$$C = \sin(\pi + x)\cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)\cos(\pi + x)$$
$$D = \sin(x + 11\pi) + \sin(11\pi - x) - \cos(11\pi - x)$$

3 Equations trigonométriques

3.1 De la forme $\cos x = \cos a$

Propriété 6 : L'équation $\cos x = \cos a$ a pour solution $x = a + k \times 2\pi$ ou $x = -a + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : graphiquement il existe deux points M et M' (symétriques par rapport à la droite (OI)) sur le cercle qui correspondent à des angles ayant le même cosinus.

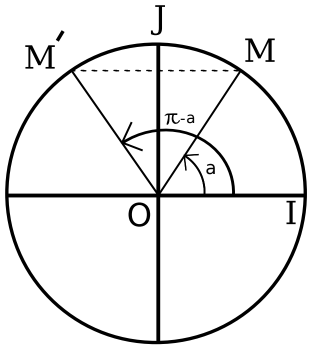


Exemple : l'équation $\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$ a pour solution dans $\mathbb{R}$: $x = \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ ou $x = \frac{-\pi}{4} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.2 De la forme $\sin x = \sin a$

Propriété 7 : L'équation $\sin x = \sin a$ a pour solution $x = a + k \times 2\pi$ ou $x = \pi - a + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : graphiquement il existe deux points M et M' (symétriques par rapport à la droite (OJ)) sur le cercle qui correspondent à des angles ayant le même sinus.



<u>Exemple</u> :

L'équation $\sin x$=$\sin \dfrac{-2\pi}{3}$ a pour solution dans $\mathbb{R}$: $x = \dfrac{-2\pi}{3} + k \times 2\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{-2\pi}{3} + k \times 2\pi$=$\dfrac{5\pi}{3} + k \times 2\pi$=$-\dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Exercice 3</u> : A l'aide d'une figure, résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi[$.
2. $\sin(x) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-\pi; \pi[$.
3. $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi; \pi[$.
4. $\sin(x) < \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [0; 2\pi[$.