Suites

1 Généralités sur les suites

1.1 Définition

Définition : Une suite u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang n_0) qui, à chaque entier naturel n de $\mathbb{N}$ (ou pour $n \geqslant n_0$) associe un réel noté $u(n)$ ou encore u_n. Autrement dit, cette fonction, notée plus simplement (u_n) est de la forme :

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

1.2 Formule explicite d'une suite

Une suite (u_n) peut être définie par une formule donnée explicitement, permettant d'exprimer u_n en fonction de n (c'est à dire de trouver une fonction f telle que $u_n = f(n)$).

Exemples :

1) Soit u_n définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 1$. On a donc $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x + 1$ (f est définie sur $\mathbb{R}$).
2) Soit u_n définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. On a donc $u_n = g(n)$ avec $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ (g est définie sur $\mathbb{R}$).

On verra plus loin que ce type de suite a un sens de variation facilement exploitable, lorsque la fonction f est monotone.

1.3 Relation de récurrence : u_{n+1} en fonction de u_n

Une suite (u_n) peut être construite à partir d'un rang donné et à partir d'une **relation de récurrence** permettant d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemples :
1) Soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$. On trouve facilement $u_1 = 5$, $u_2 = 17$, etc.
2) Soit v_n la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \sqrt{(v_n)^2 + 1}$. On trouve facilement $v_1 = \sqrt{2}$, $v_2 = \sqrt{3}$, etc.

Remarque : trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} revient donc à trouver une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.4 Représentation graphique d'une suite

2 Sens de variation d'une suite

Définition : Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.
-On dit que (u_n) est croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$
-On dit que (u_n) est décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_{n+1}$
-On dit que (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
-On dit que (u_n) est constante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$

Remarque : on peut définir de la même façon une suite strictement croissante (etc.) par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$

Propriété :
-Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.
-Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite (u_n) est croissante.

Propriété :
-Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite (u_n) est croissante.
-Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Remarque : on a **absolument** besoin de $u_n > 0$ afin de pouvoir appliquer la propriété précédente.

Propriété : Soit f la fonction telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$.
-Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
-Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

démonstration :

Remarques :
-Ces trois propriétés sont donc très pratiques afin de déterminer le sens de variation d'une suite.
-La dernière propriété n'est utilisable que dans le cas où la fonction f est monotone (ie croissante ou décroissante).
-Une suite peut n'être croissante (ou décroissante) qu'à partir d'un certain rang. La définition donnée est donc un rien brutale.
-Lorsque l'on a une suite définie par une relation de récurrence, du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on ne peut déduire le sens de variation de u_n de celui de f.

Exemple : soit la suite définie par $u_n = n^2 + 4n$ et soit $f(x) = x^2 + 4x$. On a bien $u(n) = f(n)$, et en étudiant la dérivée de f, on montre que f est croissante sur $[0; +\infty[$. La suite (u_n) est donc croissante sur $\mathbb{N}$.

2.1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition : Soit une suite (u_n) et soit M et m deux nombre réels.
-On dit que (u_n) est majorée par M lorsque pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant M$
Le réel M est appelé **majorant** de la suite (u_n)
-On dit que (u_n) est minorée par m lorsque pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant m$
Le réel m est appelé **minorant** de la suite (u_n)
-On dit que (u_n) est bornée lorsque (u_n) est à la fois minorée et majorée.

Remarques :
-toute suite croissante est minorée par son premier terme u_0
-toute suite décroissante est majorée par son premier terme u_0
-toute suite bornée ne peut pas avoir pour limite $+\infty$ ou $-\infty$. Par contre, une suite bornée peut ne pas avoir de limite du tout.

Exemples : $u_n = (-1)^n$ est bornée (minorée par -1, majorée par 1), mais cette suite n'admet pas de limite.

3 Suites arithmétiques

3.1 Définition

Une suite (u_n) est arithmétique lorsque à partir du terme initial, l'on passe d'un terme de la suite au terme suivant en ajoutant toujour le même nombre r, appelé **raison**.

Autrement dit, une suite (u_n) est arithmétique lorsque l'on a pour tout entier naturel n, la relation : $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

Exemples :
1) (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$. On trouve ainsi $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, la raison $r = 2$.
2) (u_n) définie par $u_0 = -20$ et $u_{n+1} = u_n - 1$. On trouve ainsi $u_1 = -21$, $u_2 = -22$, $u_3 = -23$, la raison $r = -1$.

3.2 Formulaire

Propriété 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n-p)r$$

Remarque : Cette propriété est bien pratique pour trouver rapidement un terme voulu de la suite. Par exemple si $u_0 = 2$ et $r = 2$ alors $u_{200} = u_0 + 200 \times 2 = 402$.

Propriété 2 : La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$S = (nombredetermes) \times \frac{premierterme + dernierterme}{2}$$

Plus usuellement : $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Exemple : Calculer $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 100$.
Si on pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 1$ on obtient : $S = 100 \times \dfrac{u_0 + u_{99}}{2} = 100 \times \dfrac{101}{2} = 5050$.
Remarque : on a coutume de retenir : $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3.3 Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :
-La suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
-La suite (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
-La suite (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

démonstration :

Exemple : la suite (w_n) définie par $w_n = -3n + 5$ est strictement décroissante car c'est une suite arithmétique de raison -3.

4 Suites géométriques

4.1 Définition

Une suite est **géométrique** lorsque, à partir du terme initial, l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours pas le même nombre q, appelé **raison**.

Autrement dit, une suite (u_n) est géométrique lorsque l'on a pour tout entier naturel n, la relation : $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q \neq 0$.

Exemples :
1) (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \times 2$. On trouve ainsi $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8$, la raison $q = 2$.
2) (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{2}$. On trouve ainsi $u_1 = \frac{-1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{-1}{8}$, la raison $q = \frac{1}{2}$.

4.2 Formulaire

Propriété 1 : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 \times q^n$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\, p \in \mathbb{N},\, u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Remarque : Cette propriété est bien pratique pour trouver rapidement un terme voulu de la suite. Par exemple si $u_0 = 2$ et $q = 2$ alors $u_{200} = 2 \times 2^{200} = 2^{201}$.

Propriété 2 : La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

Plus généralement : Somme des termes d'une suite=(terme initial)$\times \dfrac{1 - raison^{nombredetermes}}{1 - raison}$

Exemple : Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 16384$.

4.3 Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété : Soit q un nombre réel non nul.
-Si $q > 1$ alors la suite (q^n) est strictement croissante.
-Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
-Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante.

démonstration :

Remarques :
-Grâce à cette propriété, on peut en déduire le sens de variation d'une suite géométrique. Pour cela, il faudra prendre en compte le signe du premier terme u_0. Ainsi :

-Si $u_0 > 0$, le sens de variation de la suite géométrique définie par $u_n = u_0 \times q^n$ est "la même" que celle de la propriété précédente.

-Si $u_0 < 0$, le sens de variation de la suite géométrique définie par $u_n = u_0 \times q^n$ est "l'inverse" de celle de la propriété.

On peut aussi déterminer les limites de la suite géomtrique définie par $u_n = u_0 \times q^n$:

-Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors (u_n) a pour limite $+\infty$
-Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors (u_n) a pour limite $-\infty$
-Si $-1 < q < 1$ alors (u_n) a pour limite 0 (et ce quelle que soit la valeur de u_0)
-Si $q \leqslant -1$ alors (u_n) n'a pas de limite !

Exemples :
-Soit la suite définie par $u_n = (-1)^n$. C'est une suite géométrique, de raison -1, et de premier terme $u_0 = 1$. Cette suite n'est pas monotone, et n'a pas de limite.
-Soit la suite définie par $u_n = (2)^n$. C'est une suite géométrique, de raison 2, et de premier terme $u_0 = 1$. Cette suite est strictement croissante, et tend vers $+\infty$.
-Soit la suite définie par $u_n = -2\times(\frac{1}{2})^n$. C'est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{2}$, et de premier terme $u_0 = -2$. Cette suite est strictement décroissante, et tend vers 0.