Second degré

1 Polynôme du second degré

1.1 Définition

Définition : On appelle fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré [1]), toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(x) = ax^2 + bx + c \end{array} \quad \text{où } a, b, c \text{ sont des réels (appelés coefficients) et avec } a \neq 0.$$

La forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée forme développée, ou réduite.

Exemples : les fonctions P_1, P_2, P_3 définies par $P_1(x) = 2x^2 - 7x + 2$, $P_2(x) = x^2$ et $P_3(x) = 1 + x^2 + 4x^2 + 4$ sont des polynômes du second degré. En revanche la fonction P_4 définie par $P_4(x) = x^3 + x^2 + 1$ n'est pas un polynôme du second degré.

Propriété 1 : Soient P et Q deux trinômes du second degré, définies sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $G(x) = a'x^2 + b'x + c'$. Alors :

$$P \text{ et } G \text{ sont égaux} \Leftrightarrow a = a',\ b = b' \text{ et } c = c'$$

1.2 Forme canonique

Propriété 2 : Tout trinôme du second degré P de forme réduite $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut sécrire de façon unique sous la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette écriture est appelé **forme canonique** du trinôme.

De plus on a les relations suivantes :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

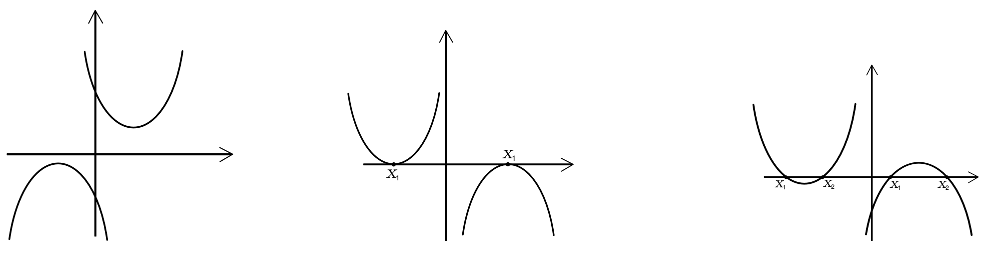
démonstration : $a(x - \alpha)^2 + \beta = a(x^2 - 2x\alpha + (\alpha)^2) + \beta = ax^2 - 2ax\alpha + a\alpha^2 + \beta = x^2(a) + x(-2a\alpha) + (a\alpha^2 + \beta)$.
On a donc $-2a\alpha = b$ et $a\alpha^2 + \beta = c$, et en résolvant ce système on trouve bien $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.

2 Forme factorisée et racine d'un polynôme de second degré

Définition : On appelle **racine** d'un polynôme du second degré P toute solution de l'équation $P(x) = 0$.

Il est d'usage de tester quelques valeurs mentalement (exemple : 0; 1; 2; -1 etc.). Lorsque ces valeurs sont solutions de $P(x) = 0$, on dit qu'il s'agit de racines évidentes.

Graphiquement, les racines d'un polynôme de second degré P correspondent à **l'abscisse** des intersections entre l'axe des abscisses et la courbe représentative du polynôme $\mathscr{C}_P$. On voit donc intuitivement se dégager trois possibilitées :



Pas de solution — Une unique solution — Deux solutions

1. Pour éviter les mauvaises blagues, on travaillera évidemment dans l'ensemble des nombre réels.

Propriété 3 : Si P est un trinôme du second degré de forme réduite $P(x) = ax^2 + bx + c$ dont on connait une racine évidente x_1, alors il existe un autre réel x_2 (éventuellement $x_1 = x_2$) tel que :

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Cette écriture (bien pratique) est appelée la **forme factorisée** du polynôme du second degré. Le but du jeu du chapitre est d'ailleurs de trouver une méthode (lorsque c'est possible) afin de mettre le polynôme de second degré étudié sous la forme factorisée.

Remarque : réciproquement à la propriété 3, si un trinôme admet une forme factorisée, alors il admet deux racines (éventuellements confondues). De plus si un polynôme n'admet pas de racines, on ne peut pas le factoriser.

3 Résolution d'une équation du second degré

3.1 Propriété fondamentale

Propriété 4 : Soit P un trinôme de second degré définit par $P(x) = ax^2 + bx + c$, et soit le nombre réel Δ définit par $\Delta = b^2 - 4ac$. Ce nombre réel est appelé **discriminant** du polynôme, et on a alors :

-Lorsque $\Delta < 0$, l'équation $P(x) = 0$ n'admet pas de solutions réelles.

-Lorsque $\Delta = 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution réelle x_1 (que l'on appelle racine double).

-Lorsque $\Delta > 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions réelles disctinctes x_1 et x_2, données par :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

démonstration :

$P(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a})$=$a((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$=$a((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}))$.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ pour simplifier l'écriture. On a donc $P(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2})$.

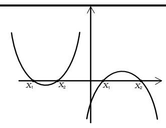
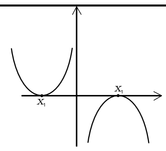
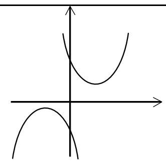
-Supposons que $\Delta > 0$. Dans ce cas, $\sqrt{\Delta}$ existe, et on a : $P(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2-(\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}})^2)$=$a((x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})$ =$a(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})$.

Il y a donc deux solutions à l''équation $P(x) = 0$ qui sont $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

-Supposons que $\Delta = 0$. On a alors $P(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$. L'équation $P(x) = 0$ a une unique solution $x = \frac{-b}{2a}$.

-Supposons que $\Delta < 0$. Dans ce cas $-\Delta > 0$, donc $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$, et pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$. Il n'y a donc pas de solutions réelles à l'équation $P(x) = 0$.

Bilan de l'étude de $P(x) = 0$

Signe de Δ	Factorisation de P	Racines réelles de P	Représentation graphique
$\Delta > 0$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	
$\Delta = 0$	$P(x) = a(x - x_1)^2$	$x_1 = \dfrac{-b}{2a}$	
$\Delta < 0$	Pas de factorisation	Pas de racines réelles	

3.2 Exemples

a) Résoudre l'équation $P_1(x) = 0$ avec $P_1(x) = 4x^2 - 24x + 3$.
On trouve $\Delta = 24^2 - 4 \times 4 \times 3 = 528 > 0$, il y a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{24 - \sqrt{528}}{8} = \dfrac{6 - \sqrt{33}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{24 + \sqrt{528}}{8} = \dfrac{6 + \sqrt{33}}{2}$.

b) Résoudre l'équation $P_2(x) = 0$ avec $P_2(x) = 3x^2 + 147 - 42x$.
On trouve $\Delta = 42^2 - 4 \times 3 \times 147 = 0$, d'où une solution unique $x_1 = \dfrac{42}{2 \times 3} = 7$. Il était par ailleurs assez visible que $P(x) = 3(x - 7)^2$, d'où la racine unique $x_1 = 7$.

c) Résoudre l'équation $P_3(x) = 0$ avec $P_3(x) = x^2 + 4x + 11$.
On trouve ici $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 11 = -28 < 0$, donc il n'y a pas de solution réelle à l'équation $P_3(x) = 0$.

4 Etude des polynômes du second degré

4.1 Propriété et définition

Propriété 5 : Soit P un trinôme de second degré définit par $P(x) = ax^2 + bx + c$, et soit Δ son **discriminant**.

-Lorsque $\Delta < 0$ alors $P(x)$ est du signe de a pour tout réel x.

-Lorsque $\Delta = 0$ alors $P(x)$ est du signe de a lorsque $x \neq \dfrac{-b}{2a}$.

-Lorsque $\Delta > 0$ et $x_1 < x_2$ alors $P(x)$ est du signe de a si et seulement si $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$

démonstration rapide :

Bilan lorsque $\Delta > 0$:

Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Définition : On appelle inéquation du second degré à une inconnue toute inéquation de la forme $P(x) < 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \geqslant 0$ ou $P(x) \leqslant 0$ où P est un polynôme du second degré.

4.2 Exemples

a) Soit $P_1(x) = 4x^2 - 24x + 3$. Résoudre $P_1(x) < 0$ et $P_1(x) \geqslant 0$.
On a vu précedement que $P_1(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 car $\Delta > 0$. Ici, $a = 4$, on est donc dans la configuration suivante :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble de solution de $P_1(x) < 0$ est $]x_1; x_2[$, plus précisement $]\dfrac{6-\sqrt{33}}{2}; \dfrac{6+\sqrt{33}}{2}[$

L'ensemble de solution de $P_1(x) \geqslant 0$ est $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$, plus précisement $]-\infty; \dfrac{6-\sqrt{33}}{2}] \cup [\dfrac{6+\sqrt{33}}{2}; +\infty[$

b) Soit $P_2(x) = P_2(x) = 3x^2 + 147 - 42x$. Résoudre $P_2(x) < 0$, $P_2(x) \geqslant 0$ et $P_2(x) \leqslant 0$.
On sait que $\Delta = 0$, $x_1 = 7$, $P_2(x) = 3(x-7)^2$. Le polynôme P_2 est du signe de $a = 3$ lorsque $x \neq 7$.
L'ensemble de solution de $P_2(x) < 0$ est donc S=$\emptyset$.
L'ensemble de solution de $P_2(x) \geqslant 0$ est donc S=$\mathbb{R}$.
L'ensemble de solution de $P_2(x) \leqslant 0$ est donc S=$\{ 7 \}$.

c) Soit $P_3(x) = x^2 + 4x + 11$. Résoudre $P_3(x) < 0$ et $P_3(x) > 0$.
On trouve ici $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de solution réelle à l'équation $P_3(x) = 0$, et $P_3(x)$ est toujours du signe de $a = 1$.
L'ensemble de solution de $P_3(x) < 0$ est donc S=$\emptyset$.
L'ensemble de solution de $P_3(x) > 0$ est donc S=$\mathbb{R}$.