

Probabilités

I) Notion de Probabilité

A) Définition

Définitions :

-une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne connaît pas le résultat à l'avance, mais dont on connaît tous les résultats possibles, et que l'on peut reproduire plusieurs fois dans les mêmes conditions.

-une **issue** est le résultat d'une expérience aléatoire.

-un **événement** est une condition qui, selon l'issue, est réalisée ou non.



Exemple du dé : on lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on note le chiffre obtenu. Il y a 6 issues possibles : obtenir 1-2-3-4-5-6.

L'événement « obtenir un chiffre pair » est réalisé avec les issues 2, 4, 6.

Définition : La **probabilité** d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance » qu'un événement se produise. On notera $P(A)$ ou $p(A)$ la probabilité de l'événement A.

Dans une expérience où toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

B) Calcul de probabilité

Propriété : la probabilité d'un événement A est $P(A) = \frac{\text{nombre issues favorables}}{\text{nombre issues possibles}}$

Exemple du dé : 

On a autant de chances d'obtenir le chiffre 1, que le chiffre 2, que le chiffre 3, etc. Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité. Il y a 6 issues possibles : obtenir 1-2-3-4-5-6.

La probabilité d'obtenir le chiffre 1 est donc de $\frac{1}{6}$, la probabilité d'obtenir le chiffre 2 est de $\frac{1}{6}$, etc.

Soit A l'événement « obtenir un chiffre pair » (qui est réalisé avec trois issues différentes : 2, 4 et 6).

On a donc $P(A) = \frac{3}{6}$.

C) Vocabulaire des événements

- Un événement dont la probabilité est égale à 0 est un événement **impossible**.
- Un événement dont la probabilité est égale 1 est un événement **certain**.
- Deux événements A et B qui ne peuvent pas se réaliser en même temps sont **incompatibles**.

Exemple du dé : 

Soit B l'événement « obtenir un chiffre supérieur à 20 ». On a donc $P(B)=0$ (événement impossible).

Soit C l'événement « obtenir un chiffre compris entre 0 et 10 ». On a donc $P(C)=1$ (événement certain).

Les événements B et C sont incompatibles, car on n'existe pas de chiffre compris entre 0 et 10 qui soit en même temps supérieur à 20.

D) Événement contraire

Définition : l'événement contraire de A, noté \bar{A} , est l'ensemble de toutes les issues n'appartenant pas à A.

Propriété : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple du dé : 

Soit A l'événement « obtenir un chiffre pair » (qui est réalisé avec les issues 2, 4 et 6). L'événement contraire de A est donc « obtenir un chiffre qui ne soit pas pair », ou encore « obtenir un chiffre impair ».

On a donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Notations :

-L'événement $A \cap B$ est l'ensemble de toutes les issues appartenant à A et à B en même temps.

-L'événement $A \cup B$ est l'ensemble de toutes les issues appartenant à A ou à B ou à $A \cap B$.

II) Un peu de hors programme

A) Probabilité de l'union

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dans le cas où A et B sont **incompatibles**, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ et $P(A \cap B) = 0$.

Exemple du dé :  Soit l'événement D : « on obtient un multiple de 3 » et soit l'événement G : « on obtient 5 » .

Les issues favorables à D sont 3 et 6 (deux issues favorables), donc $P(D) = \frac{2}{6}$.

La seule issue favorable à G est 5 (une issue favorable), donc $P(G) = \frac{1}{6}$.

Les événements D et G sont incompatibles, donc $P(D \cap G) = 0$ et $P(D \cup G) = P(D) + P(G) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$.

B) Expérience aléatoire à deux épreuves



On lance deux fois de suite une pièce de monnaie (il y a deux issues possibles).

Soit A l'événement : « On obtient deux fois pile ».

Soit B l'événement : « On obtient deux fois face ».

Soit C l'événement : « On obtient au moins une fois la face pile ».

On effectue un arbre pondéré représentant la situation.

On trouve alors : $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{3}{4}$